# APLICAŢII ALE CALCULULUI DIFERENŢIAL

## Material pentru uzul studenţilor de la

## FACULTATEA DE MECANICĂ

# Contents

# Chapter 1

# Aplicaţii ale calculului diferenţial

## 1.1 Extreme ale funcţiilor reale de mai multe variabile reale

### 1.1.1 Exemple şi exerciţii rezolvate

**Exerciţiul 1.1.1** Să *se determine punctele de extrem local ale funcţiei*

$$f : I\!R^2 \to I\!R, \qquad f(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 8x + 8y.$$

**Soluţie.** Determinăm punctele critice (staţionare) ale funcţiei $f$.

Întrucât funcţia $f$ este de clasă $C^\infty(I\!R^2)$, pentru determinarea acestor puncte staţionare, trebuie să calculăm derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei $f$. Avem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 + 4xy^2 - 8, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 + 4x^2y + 8.$$

Soluţiile sistemului obţinut prin anularea derivatelor parţiale de ordinul întâi ale funcţiei $f$

$$\begin{cases} x^4 + xy^2 & = & 2 \\ y^3 + x^2y & = & -2 \end{cases}$$

vor fi ppunctele staţionare ale funcţiei $f$. Sistemul obţinut este omogen. După adunarea ecuaţiilor şi împărţirea cu $y^3$ se ajunge la ecuaţia

$$t^3 + t^2 + t + 1 = 0, \qquad t = \frac{x}{y}.$$

Singura soluţie reală a ecuaţiei în $t$ este $t_0 = -1$ şi pentru a determina punctele staţioanre avem de rezolvat sistemul

$$\begin{cases} y = -x \\ x^3 + xy^2 = 2. \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem, găsim că singurul punct staţionar este $\mathbf{x}_0 = (1, -1)$.

Pentru a decide natura acestui punct staţionar trebuie să calculăm valorile derivatelor parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei $f$ în punctul $\mathbf{x}_0$. Avem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{x}_0) = (12x^2 + 4y^2)\Big/_{(1,-1)} = 16; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{x}_0) = (8xy)\Big/_{(1,-1)} = -8;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{x}_0) = (12y^2 + 4x^2)\Big/_{(1,-1)} = 16.$$

Hessiana funcţiei $f$ în punctul $\mathbf{x}_0$ este matricea pătratică simetrică de ordinul al doilea

$$H_f(\mathbf{x}_0) \;=\; \begin{pmatrix} 16 & -8 \\ -8 & 16 \end{pmatrix}.$$

Minorii principali ai acestei matriec sunt $\Delta_1 = 16 > 0$ şi $\Delta_2 = \det H_f(\mathbf{x}_0) = 192 > 0$ şi, după criteriul lui Sylvester, rezultă că $\mathbf{x}_0 = (1, -1)$ este punct de minim local al funcţiei $f$, iar valoarea minimă este $f_{\text{min}} = f(1, -1) = -12.$■

**Exerciţiul 1.1.2** Să *se determine punctele de extrem local ale funcţiei*

$$f : D \to I\!R, \qquad f(x, y) = \frac{1}{2}xy + (47 - x - y)\Big(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\Big),$$

*unde $D$ este domeniul format din toate punctele primului cadran al reperului $xOy$.*

**Soluţie.** Derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei sunt:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{1}{2}y - \Big(\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4}\Big) + \dfrac{1}{3}(47 - x - y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \dfrac{1}{2}x - \Big(\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4}\Big) + \dfrac{1}{4}(47 - x - y). \end{cases}$$

Sistemul dedus după anularea acestor derivate are în final forma

$$\begin{cases} 8x + y &=& 4 \cdot 47 \\ x + 6y &=& 3 \cdot 47. \end{cases}$$

Soluţia acestui sistem este $x_0 = 21$, $y_0 = 20$ şi deci singurul punct staţionar al funcţiei este $M_0(21, 20)$.

Derivatele parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei $f$ sunt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{2}{3}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\frac{1}{12}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{1}{2}.$$

Diferenţiala a doua a funcţiei $f$ într–un punct arbitrar $M(x,y) \in D$ este

$$d^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)dy^2.$$

În punctul staţionar determinat rezultă că diferenţiala a doua a funcţiei $f$ în punctul $M_0(x_0, y_0)$ este

$$d^2 f(x_0, y_0) = -\frac{2}{3}dx^2 - \frac{1}{6}dxdy - \frac{1}{2}dy^2.$$

Observăm că această formă pătratică se poate scrie ca

$$d^2 f(x_0, y_0) = -\frac{1}{6}\Big[\Big(2dx + \frac{1}{4}dy\Big)^2 + \frac{47}{16}dy^2\Big]^2,$$

de unde deducem că diferenţiala a doua a funcţiei $f$ în punctul staţionar găsit este o formă pătratică negativ definită ceea ce atrage că $M_0$ este punct de maxim. Valoarea maximă locală a funcţiei $f$ este $f_{\max} = f(M_0) = 220$. ■

**Exemplul 1.1.1** *Funcţia reală de două variabile reale*

$$f : I\!R^2 \to I\!R, \qquad f(x,y) = x^3 + y^3 + 21xy + 36x + 36y$$

*are două puncte staţionare. Unul dintre ele este punct de maxim iar celălalt este punct de tip şa.*

**Soluţie.** Sistemul ale cărui soluţii sunt punctele staţionare ale funcţiei $f$ este

$$\begin{cases} x^2 + 7y + 12 = 0, \\ y^2 + 7x + 12 = 0. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 + 7y + 12 = 0, \\ (x-y)(x+y+7) = 0. \end{cases}$$

Ultimul sistem este echivalent cu două sisteme dintre care doar

$$\begin{cases} x^2 + 7y + 12 = 0, \\ x + y + 7 = 0. \end{cases}$$

are soluţii reale. Rezolvându–l, se găsesc două soluţii, $(-4,-4)$ şi $(-3,-3)$. Prin urmare, funcţia $f$ are două puncte staţionare $M_1$ şi $M_2$, unde $M_1(-4,-4)$, $M_2(-3,-3)$.

Derivatele parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei $f$ au expresiile

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 21, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6y,$$

iar valorile acestora în punctele staţionare sunt:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_1) = -24, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_1) = 21, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_1) = -24, \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_2) = -18, & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_2) = 21, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_2) = -18. \end{cases}$$

Diferenţialele de ordinul al doilea în punctele staţionare au expresiile:

$$\begin{cases} d^2 f(M_1) &= -24dx^2 + 42dxdy - 24dy^2; \\ d^2 f(M_1) &= -18dx^2 + 42dxdy - 18dy^2, \end{cases}$$

Fiecare diferenţială este o formă pătratică definită pe $I\!R^2$. Vom încerca să scriem aceste forme pătratice ca sume de pătrate, ceea ce înseamnă a le aduce la expresii canonice ale lor.

Vom folosi metoda lui Gauss de aducere a unei forme pătratice la o expresie canonică a sa. Aceasta constă în grupări ale termenilor după procedeul:

- dacă termenul care conţine $dx^2$ are coeficientul nenul, atunci se grupează toţi termenii care au ca factor pe $dx$;

- în cazul că nu există termen care să conţină $dx^2$, se aplică pasul precedent în care $dx$ se înlocuieşte cu $dy$;

- se adună şi se scade termenul care lipseşte din dezvoltarea unui binom la pătrat;

- se reduc termenii asmănători după care se reia procedeul în care rolul lui $dx$ (sau după caz $dy$) îl are $dy$ (respectiv $dx$);

- dacă nu există termeni care să conţină $dx^2$ şi $dy^2$, iar coeficientul termenului ce conţine produsul $dxdy$ este diferit de zero, atunci se efectuează schimbarea $dx = d\xi + d\eta$, $dy = d\xi - d\eta$. În acest mod, expresia diferenţialei a doua a funcţiei $f$ într–un punct va avea un termen care conţine $d\xi^2$ şi se reia procedeul de la primul pas;

- în final, aplicarea repetată a acestui procedeu conduce la o expresie a diferenţialei a doua a funcţiei $f$ într–un punct ca o sumă de pătrate.

Procedeul de scriere a unei forme pătratice ca o sumă de pătrate se poate aplica şi atunci când forma pătratică are mai mult de două variabile, după cum vom vedea într–un alt exemplu, în care funcţia căreia îi cercetăm punctele de extrem are trei sau mai multe variabile. În cazul unei funcţii de trei variabile, pasul al treilea se înlocuieşte corespunzător cu pasul:

- se adună şi se scad termenii care lipsesc din dezvoltarea unui trinom la pătrat.

Aplicând aici metoda descrisă, găsim:

$$d^2f(M_1) = -6\Big(2dx - \frac{7}{2}\Big)^2 - \frac{45}{8}dy^2; \quad d^2f(M_2) = -2\Big(3dx - \frac{7}{2}\Big)^2 + \frac{13}{2}dy^2.$$

Examinarea acestor expresii ale celor două diferenţiale arată că prima este o formă pătratică negativ definită, iar a doua este formă pătratică nedefinită. Prin urmare, $M_1$ este un punct de maxim în timp ce punctul $M_2$ nu este punct de extrem, este punct şa. ■

**Exerciţiul 1.1.3** D*eterminaţi punctele din* $I\!R^2$ *în care, local, funcţia*

$$f : I\!R^2 \to I\!R, \quad f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 2$$

*are valori extreme.*

**Soluţie.** Funcţia dată este infinit diferenţiabilă iar derivatele sale parţiale de primele două ordine sunt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 9y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 9x;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -9, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6y.$$

Sistemul format prin anularea derivatelor parţiale de ordinul întâi ale funcţiei $f$ are două soluţii, $O(0,0)$ şi $M_1(3,3)$ iar diferenţialele corespunzătoare au expresiile

$$\begin{aligned} d^2f(0,0) &= -18dxdy, \\ d^2f(3,3) &= 18dx^2 - 18dxdy + 18dy^2. \end{aligned}$$

Diferenţiala a doua a funcţiei $f$ în origine este formă pătratică nedefinită (are valori atât negative cât şi nenegative pentru diverse valori ale lui $dx$ şi $dy$), aceasta arătând că originea este un punct de tip şa a funcţiei.

Diferenţiala a doua a funcţiei $f$ în cel de al doilea punct critic este formă pătratică pozitiv definită deoarece, folosind metoda lui Gauss, se poate scrie

$$d^2f(3,3) = 18\Big[\Big(dx - \frac{1}{2}dy\Big)^2 + \frac{3}{4}dy^2\Big]$$

şi, prin urmare, punctul $M_1(3,3)$ este punct de minim local. Valoarea minimă locală a funcţiei este $f_{\min} = f(3,3) = 0$.

Se constată că există o vecinătate $V$ a punctului $M_1$ cu proprietatea

$$f(x,y) > f(3,3) = 0, \quad (\forall)\ M(x,y) \in V \setminus M_1,$$

fapt ce conduce la concluzia că punctul $M_1$ este un punct de minim local strict al funcţiei $f$. ■

**Exerciţiul 1.1.4** Să *se determine punctele de extrem ale funcţiei* $z = xy^2e^{x-y}$ *pe domeniul ei maxim de definiţie.*

**Soluţie.** Domeniul maxim de definiţie al funcţiei este $\mathbb{R}^2$.

Derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei sunt:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2(x+1)e^{x-y}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = xy(2-y)e^{x-y}.$$

Rezolvând sistemul care dă punctele staţionare se găsesc:

$$M_1(0,0); \qquad M_2(-1,0); \qquad M_3(-1,2).$$

Derivatele parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei $z$ sunt:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y) & = & y^2(x+2)e^{x-y}; \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x,y) & = & y(x+1)(2-y)e^{x-y}; \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y) & = & x(2-4y+y^2)e^{x-y}. \end{cases}$$

Diferenţiala a doua a funcţiei $z$ într–un punct oarecare $M(x,y)$ este

$$d^2z(x,y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y)dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(x,y)dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y)dy^2.$$

Diferenţiala a doua a funcţiei $z$ în $M_2$ este $d^2z(M_2) = -\frac{2}{e}dy^2$ şi se constată că este o formă pătratică negativă, deci $M_2$ este punct de maxim local al funcţiei.

Diferenţiala a doua a funcţiei în $M_3$, $d^2z(M_3) = \frac{2}{e^3}(2dx^2 + dy^2)$, este formă pătratică pozitiv definită, ceea ce arată că $M_3$ este punct de minim local al funcţiei.

Diferenţiala a doua a funcţiei $z$ în punctul $M_1$ este identic nulă indiferent de valorile lui $dx$ şi $dy$.

Prin urmare, nu putem decide asupra naturii punctului staţionar $M_1(0,0)$.

În acest caz se poate aplica definiţia punctului de extrem şi pentru aceasta se studiază semnul creşterii $f(x,y) - f(0,0)$ în vecinătatea originii.

Creşterea

$$f(x,y) - f(0,0) = xy^2e^{x-y}$$

nu păstrează semn constant în oricare din vecinătăţile originii şi deci punctul $M_1(0,0)$ nu este punct de extrem local al funcţiei $z$; este punct de tip şa. ■

**Exerciţiul 1.1.5** Să *se determine valorile extreme ale funcţiei*

$$f : I\!\!R^2 \to I\!\!R, \quad f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

**Soluţie.** Derivatele parţiale până la ordinul doi inclusiv ale funcţiei sunt:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 15, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = 6xy - 12;$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y) = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(x,y) = 6y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y) = 6x.$$

Din anularea derivatelor parţiale de ordinul întâi, efectuată pentru a se determina punctele staţionare ale funcţiei, se obţine

$$\begin{cases} x^2 + y^2 & = & 5 \\ xy & = & 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (x+y)2 & = & 9 \\ xy & = & 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y & = & \pm 3 \\ xy & = & 2 \end{cases}$$

Rezolvarea ultimelor două sisteme conduce la patru puncte staţionare

$$M_1(1,2),\quad M_2(2,1),\quad M_3(-1,-2),\quad M_4(-2,-1).$$

Matricele hessiene corespunzătoare celor patru puncte staţionare au elementele

$$H_z(M_1)=\begin{pmatrix}6 & 12\\ 12 & 6\end{pmatrix},\qquad H_z(M_2)=\begin{pmatrix}12 & 6\\ 6 & 12\end{pmatrix},$$
$$H_z(M_3)=\begin{pmatrix}-6 & -12\\ -12 & -6\end{pmatrix},\qquad H_z(M_4)=\begin{pmatrix}-12 & -6\\ -6 & -12\end{pmatrix}.$$

Vom folosi metoda valorilor proprii pentru a stabili natura formelor pătratice $d^2z(M_1)$, $d^2z(M_2)$, $d^2z(M_3)$, $d^2z(M_4)$ care, cu ajutorul matricelor hessiene, se scriu în forma

$$\begin{cases} d^2z(M_1) = (dx\,dy)\cdot H_z(M_1)\cdot\begin{pmatrix}dx\\ dy\end{pmatrix},\\ d^2z(M_2) = (dx\,dy)\cdot H_z(M_2)\cdot\begin{pmatrix}dx\\ dy\end{pmatrix},\\ d^2z(M_3) = (dx\,dy)\cdot H_z(M_3)\cdot\begin{pmatrix}dx\\ dy\end{pmatrix},\\ d^2z(M_4) = (dx\,dy)\cdot H_z(M_4)\cdot\begin{pmatrix}dx\\ dy\end{pmatrix}.\end{cases}$$

Valorile proprii ale oricărei din cele patru diferenţiale sunt aceleaşi cu ale matricei hessiene corespunzătoare.

Valorile proprii ale unei matrice pătratice simetrică $A$, cu elementele $a_{11}$, $a_{12}=a_{21}$ şi $a_{22}$, sunt rădăcinile ecuaţiei caracteristice $P(\lambda)=0$, unde $P(\lambda)$ este polinomul caracteristic al matricei

$$P(\lambda)=\det(A-\lambda\,I_2)=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+\det A,$$

iar $I_2$ este matricea unitate de ordinul doi.

O rădăcină a ecuaţiei caracteristice a unei matrice pătratice simetrică $A$ se numeşte fie *valoare proprie* a acesteia, fie *valoare proprie* a formei pătratice $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ care în baza canonică din $\mathbb{R}^2$ are matricea $A$.

O formă pătratică $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, care în baza canonică din $\mathbb{R}^2$ are matricea $A$, are expresia analitică

$$f(x_1, x_2) = (x_1\, x_2) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2,$$

unde $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ este un vector arbitrar din $\mathbb{R}^2$.

Cele patru polinoame caracteristice $P_1(\lambda)$, $P_2(\lambda)$, $P_3(\lambda)$, $P_4(\lambda)$ ale respectiv celor patru diferenţiale ale funcţiei $z$ în punctele staţionare $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ sunt

$$\begin{array}{rclrcl} P_1(\lambda) & = & (\lambda+6)(\lambda-18), & P_2(\lambda) & = & (\lambda-6)(\lambda-18), \\ P_3(\lambda) & = & (\lambda-6)(\lambda+18), & P_4(\lambda) & = & (\lambda+6)(\lambda+18). \end{array}$$

Criteriul pe care îl vom utiliza pentru a determina natura unei forme pătratice $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, a cărei matrice $A$ în baza canonică din $\mathbb{R}^2$ are rădăcinile caracteristice $\lambda_1$ şi $\lambda_2$, constă în următoarele:

- dacă toate valorile proprii ale formei pătratice $f$ sunt pozitive, atunci forma pătratică este pozitiv definită;
- dacă toate valorile proprii ale formei pătratice $f$ sunt negative, atunci forma pătratică este negativ definită;
- dacă toate valorile proprii ale formei pătratice $f$ sunt nenegative, atunci forma pătratică este pozitivă;
- dacă toate valorile proprii ale formei pătratice $f$ sunt nepozitive, atunci forma pătratică este negativă;
- dacă $\lambda_1 > 0$, iar $\lambda_2 < 0$, atunci forma pătratică este nedefinită.

Natura punctului staţionar analizat depinde de natura diferenţialei a doua a funcţiei în acel punct, aceeaşi cu natura formei pătratice cu care se exprimă această diferenţială.

Aplicând funcţiei $z$ criteriul descris, găsim:

- punctele $M_1$ şi $M_3$ nu sunt puncte de extrem ale funcţiei $z$; ele sunt puncte de tip şa;
- punctul $M_2$ este un punct de minim local al funcţiei şi $f_{\min} = f(M_2) = -28$;
- punctul $M_2$ este un punct de maxim local al funcţiei şi $f_{\max} = f(M_4) = 36$.

■

**Exerciţiul 1.1.6** Să *se determine punctele de extrem local ale funcţiei*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 3y.$$

**Soluţie.** Sistemul obţinut prin anularea derivatelor parţiale de ordinul întâi ale funcţiei $f$ are o singură soluţie $(1,2)$. Prin urmare, funcţia $f$ are un singur punct staţionar $M_0(1,2)$.

Hessiana funcţiei $f$ în punctul $M_0$ este $H_f(M_0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Polinomul caracteristic al acestei matrice este

$$P(\lambda) \;=\; \det H_f(M_0) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \;=\; (1-\lambda)(3-\lambda),$$

iar valorile proprii sunt ambele pozitive. Aceasta arată că diferenţiala a doua a funcţiei $f$ în punctul $M_0$

$$d^2 f(M_0) = 2dx^2 - 2dxdy + 2dy^2$$

este o formă pătratică pozitiv definită ceea ce atrage că $M_0$ este punct de minim local.

Să observăm că expresia algebrică a funcţiei $f$ se poate pune sub forma

$$f(x,y) = \frac{1}{4}(2x-y)^2 + \frac{3}{4}(y-2)^2 - 3,$$

de unde deducem $f(x,y) \geq 3$, oricare ar fi punctul $M(x,y) \in \mathbb{R}^2$, egalitatea având loc dacă şi numai dacă $x = 1$ şi $y = 2$. Aceasta arată că punctul $M_0(1,2)$ este punct de minim global strict iar $f(M_0) = -3$ este valoare minimă globală strictă. ■

**Exerciţiul 1.1.7** A*rătaţi că funcţia*

$$f : D \to I\!R, \quad f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y},$$

*definită pe mulţimea deschisă* $D = \{(x,y) \in I\!R^2 |\, x > 0, y > 0\}$, *are o valoare minimă locală strictă.*

**Soluţie.** Funcţia $f$ fiind infinit diferenţiabilă, determinăm valorile extreme ale sale stabilindu–i mai întâi punctele critice.

Anularea derivatelor parţiale de ordinul întâi ale funcţiei $f$ conduce la un sistem care are $(5,2)$ drept soluţie unică. Prin urmare, funcţia $f$ are un singur punct critic, $M_0(5,2)$. În acest punct derivatele parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei $f$ au valorile

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(5,2) = \frac{4}{5}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(5,2) = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(5,2) = 5.$$

Ecuaţia caracteristică a matricei hessiene corespunzătoare $H_f(M_0)$,

$$5\lambda^2 - 29\lambda + 15 = 0,$$

are ambele rădăcini pozitive şi deci $d^2 f(M_0)$ este o formă pătratică pozitiv definită ceea ce atrage că $M_0$ este punct de minim local strict. Valoarea minimă locală strictă a funcţiei $f$ este $f_{\min} = f(5,2) = 30$. ■

**Observaţia 1.1.1** C*riteriul descris în ultimele două exerciţii poate fi generalizat astfel încât să se poată aplica pentru determinarea punctelor de extrem local ale unei funcţii reale de trei sau mai multe variabile reale.*

**Exemplul 1.1.2** F*uncţia reală de trei variabile reale*

$$f : I\!R^3 \to I\!R, \quad f(x,y,z) = x^2 y + yz + 32x - z^2.$$

*are un singur punct staţionar care nu este punct de extrem.*

**Soluţie.** Derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei $f$ au expresiile:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2xy + 32, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x^2 + z, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = y - 2z.$$

Coordonatele punctelor staţionare sunt soluţii ale sistemului

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} xy+16=0, \\ x^2+z=0, \\ y-2z=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_0=2, \\ y_0=-8, \\ z_0=-4. \end{cases}$$

Deci singurul punct staţionar este $M_0(2,-8,-4)$.

Derivatele parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei $f$ în punctul curent $M(x,y,z)$, sunt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z)=2y;\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y,z)=2x;\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(x,y,z)=0;$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z)=0;\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x,y,z)=1;\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z)=-2.$$

Hessiana asociată funcţiei $f$ în punctul $\mathbf{x}_0$, unde $\mathbf{x}_0=(x_0,y_0,z_0)$, este

$$H_f(\mathbf{x}_0)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{x}_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\mathbf{x}_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(\mathbf{x}_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\mathbf{x}_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{x}_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(\mathbf{x}_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(\mathbf{x}_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(\mathbf{x}_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Polinomul caracteristic al matricei $H_f(\mathbf{x}_0)$ este

$$P(\lambda)=\det H_f(\mathbf{x}_0)-\lambda I_3=\begin{vmatrix} -16-\lambda & 4 & 0 \\ 4 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^3-18\lambda^2-15\lambda+18.$$

Ecuaţia caracteristică $P(\lambda)=0$ nu poate avea toate rădăcinile pozitive căci $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=-18<0$, dar nici toate negative deoarece produsul lor este pozitiv, $\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3=18$. Mai precis, folosind şirul lui Rolle pentru determinarea poziţiilor celor trei rădăcini constatăm că $\lambda_1<0$ şi $\lambda_2<0$ iar

$\lambda_3 > 0$. Există atunci o bază în spaţiul vectorial $I\!R^3$ în care forma pătratică are expresia canonică

$$d^2 f(\mathbf{x}_0) = \lambda_1 (dx')^2 + \lambda_2 (dy')^2 + \lambda_3 (dz')^2,$$

rezultat care arată că diferenţiala a doua a funcţiei $f$ în punctul $\mathbf{x}_0$ este o formă pătratică nedefinită. Prin urmare $\mathbf{x}_0$ nu este punct de extrem; este punct de tip şa. ∎

**Exerciţiul 1.1.8** D*eterminaţi punctele de extrem local ale funcţiei*

$$f : I\!R^3 \to I\!R, \qquad f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2xy + 2xz.$$

**Soluţie.** Derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei $f$ au expresiile

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= 2x - 2y + 2z \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= 6y - 2x \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= 4z + 2x. \end{cases}$$

Funcţia $f$ fiind diferenţiabilă, eventualele puncte de extrem local ale sale se află printre punctele staţionare ale lui $f$. Pentru a determina aceste puncte staţionare trebuie să rezolvăm sistemul obţinut din anularea derivatelor parţiale de ordinul întâi ale funcţiei $f$. După simplificarea prin 2 a fiecăreia dintre ecuaţii se ajunge la sistemul

$$\begin{cases} x - y + z &= 0 \\ 3y - x &= 0 \\ 2z + x &= 0. \end{cases}$$

a cărui soluţie unică este $\mathbf{x}_0 = (0,0,0) = \mathbf{0}$. Prin urmare, singurul punct staţionar al funcţiei $f$ este originea sistemului $Oxyz$.

Pentru a decide asupra naturii punctului staţionar trebuie să determinăm matricea $H_f(\mathbf{x}_0)$, hessiana funcţiei $f$ în punctul $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$.

Această hessiană este o matrice pătratică simetrică de ordinul al treilea care are pe linii componentele gradienţilor derivatelor parţiale de ordinul întâi

calculate în $\mathbf{x}_0$. Efectuând aceste calcule, găsim

$$H_f(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Lanţul minorilor principali ai acestei matrice este

$$\Delta_1 = |2| = 2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 8, \quad \Delta_3 = \det H_f(\mathbf{0}) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 8.$$

Deoarece toţi minorii principali ai hessienei $H_f(\mathbf{x}_0)$ sunt pozitivi, conform criteriului lui Sylvester, rezultă că diferenţiala a doua a funcţiei $f$ în punctul $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$

$$d^2 f(\mathbf{x}_0) = 2dx^2 + 6dy^2 + 4dz^2 - 4dxdy + 4dxdz$$

este o formă pătratică pozitiv definită şi deci punctul critic determinat este punct de minim relativ pentru funcţia $f$. ■

**Exerciţiul 1.1.9** D*eterminaţi punctele de extrem local ale funcţiei*

$$f : D \to I\!R, \qquad f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{1}{z},$$

*unde* $D = \{M(x,y,z) \in I\!R^3 \ : \ x > 0,\, y > 0,\, z > 0\}$.

**Soluţie.** Vom calcula derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei. Avem:

$$f_{,1}(x,y,z) = 1 - \frac{y^2}{4x^2}, \quad f_{,2}(x,y,z) = \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2}, \quad f_{,3}(x,y,z) = \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2}.$$

Din sistemul obţinut prin anularea acestor derivate se deduc

$$\begin{cases} f_{,1}(x,y,z) = 0 \\ f_{,2}(x,y,z) = 0 \\ f_{,3}(x,y,z) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 1 - \dfrac{y^2}{4x^2} & = 0, \\ \dfrac{y}{2x} - \dfrac{z^2}{y^2} & = 0, \\ \dfrac{z}{y} - \dfrac{1}{z^2} & = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y & = 2x, \\ z & = y, \\ y & = z^3. \end{cases}$$

Ultimul sistem are soluţia

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ y = 1, \\ z = 1 \end{cases}$$

Prin urmare, singurul punct staţionar al funcţiei este $M_0(\frac{1}{2}, 1, 1)$.

Determinăm diferenţiala a doua a funcţiei în punctul $M_0$

$$\begin{aligned} d^2f(M_0) &= f_{,11}(M_0)dx^2 + f_{,22}(M_0)dy^2 + f_{,33}(M_0)dz^2 + \\ &+ 2(f_{,12}(M_0)dxdy + f_{,23}(M_0)dydz + f_{,31}(M_0))dzdx. \end{aligned}$$

Pentru aceasta avem nevoie de valorile derivatelor parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei $f$ în punctul $M_0$. Avem:

$$\begin{cases} f_{,11}(x,y,z) = \dfrac{y^2}{2x^3}; \quad f_{,22}(x,y,z) = \dfrac{1}{2x} + \dfrac{2z^2}{y^3}; \quad f_{,33}(x,y,z) = \dfrac{2}{y} + \dfrac{4}{z^3}; \\ f_{,12}(x,y,z) = -\dfrac{y}{2x^2}; \quad f_{,23}(x,y,z) = -\dfrac{2z}{y^2}; \quad f_{,31}(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

De aici rezultă că valorile derivatelor parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei $f$ în punctul $M_0$ sunt:

$$\begin{cases} f_{,11}(M_0) = 4; \quad f_{,22}(M_0) = 3; \quad f_{,33}(M_0) = 6; \\ f_{,12}(M_0) = -2; \quad f_{,23}(M_0) = -2; \quad f_{,31}(M_0) = 0. \end{cases}$$

Atunci diferenţiala a doua a funcţiei $f$ în punctul $M_0$ este forma pătratică

$$d^2f(M_0) = 4dx^2 + 6dy^2 + 3dz^2 - 4dxdy - 4dzdx.$$

Folosim metoda lui Gauss de aducere a unei forma pătratice la o sumă de pătrate.

În acest scop, pentru că există un termen ce îl conţine pe $dx^2$, grupăm toţi termenii ce au ca factor pe $dx$ şi alcătuim cu aceştia un pătrat perfect. Găsim

$$d^2f(M_0) = 4(dx - \frac{1}{2}dy - \frac{1}{2}dz)^2 + 5dy^2 - 2dydz + 2dz^2.$$

Pentru că există termenul ce îl conţine pe $dy^2$, procedăm similar cu termenii ce conţin factorul $dy$. În cele din urmă se obţine

$$d^2f(M_0) = 4(dx - \frac{1}{2}dy - \frac{1}{2}dz)^2 + 5(dy - \frac{1}{5}dz)^2 + \frac{9}{5}dz^2,$$

de unde se vede că forma pătratică care exprimă diferenţiala a doua a funcţiei $f$ în punctul $M_0$ este pozitiv definită şi deci punctul staţionar determinat este punct de minim pentru funcţia $f$. ■

**Exerciţiul 1.1.10** D*eterminaţi punctele de extrem local ale funcţiei*

$$f : I\!R^3 \to I\!R, \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y - z + 4.$$

**Soluţie.** Derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei $f$ sunt

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= 2x + 2y - 4 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= 2x + 2y - z - 3 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= -y + 2z - 1. \end{cases}$$

Sistemul format prin anularea acestor derivate are soluţia $(1, 1, 1)$ şi deci funcţia are un singur punct staţionar $M_0(1, 1, 1)$.

Hessiana funcţiei $f$ în punctul $M_0$ este

$$H_f(M_0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vom folosi metoda valorilor proprii pentru a stabili natura formei pătratice care reprezintă diferenţiala a doua a funcţiei $f$ în punctul $M_0$. Pentru aceasta calculăm polinomul caracteristic al matricei hessiene

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda - 1)$$

şi apoi rezolvăm ecuaţia caracteristică $P(\lambda) = 0$. Constatăm că $\lambda_1 = 2 > 0$, $\lambda_2 = 2 - \sqrt{5} < 0$, $\lambda_3 = 2 + \sqrt{5}$. Rezultă că diferenţiala a doua a funcţiei $f$ în punctul $M_0$ este o formă pătratică nedefinită ceea ce atrage că punctul $M_0$ nu este punct de extrem, este un punct de tip şa. ■

### 1.1.2 Exemple şi exerciţii propuse

**Exerciţiul 1.1.11** *Să se găsească punctele staţionare (critice) şi apoi să se selecţioneze punctele de extrem pentru funcţia*

$$f : I\!\!R^2 \to I\!\!R, \quad f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2 - 1. \tag{1.1}$$

**Răspuns**. Punctul critic $(0, 0)$ nu este punct de extrem. Punctele critice $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ şi $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ sunt puncte de minim local strict. Funcţia $f$ are aceeaşi valoare minimă în cele două puncte de minim $f_{\min} = f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -9$. ■

**Exerciţiul 1.1.12** *Să se determine punctele de extrem ale funcţiei*

$$f : I\!\!R^2 \to I\!\!R, \quad f(x, y) = x^3 - 3x^2 - 3x + y^4 - 8y^3 + 18y^2 - 8y.$$

**Răspuns**. Există şase puncte staţionare:

$$M_1(1 + \sqrt{2}, 2); \quad M_2(1 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{3}); \quad M_3(1 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{3});$$
$$M_4(1 - \sqrt{2}, 2); \quad M_5(1 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{3}); \quad M_6(1 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{3}).$$

$M_1$, $M_5$ şi $M_6$ sunt puncte de tip şa; $M_2$ şi $M_3$ sunt puncte de minim; $M_4$ este punct de maxim.

**Exerciţiul 1.1.13** *Să se studieze dacă funcţia*

$$f : I\!\!R^3 \to I\!\!R, \quad f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 6xy - 2x$$

*are puncte de extrem.*

**Răspuns**. Funcţia $f$ are punctul staţionar $M_0\Big(-\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}, 0\Big)$ care nu este punct de extrem deoarece hessiana funcţiei în acest punct nu are valorile proprii de acelaşi semn: $\lambda_1 = 5 - 3\sqrt{5} < 0$; $\lambda_2 = 5 + 3\sqrt{5} > 0$; $\lambda_3 = 18 > 0$. Prin urmare $d^2 f(M_0)$ este formă pătratică nedefinită ceea ce înseamnă că $M_0$ este punct de tip şa pentru funcţia $f$. ■

**Exemplul 1.1.3** *Funcţia reală de trei variabile reale*

$$f : I\!\!R^3 \to I\!\!R, \quad f(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2(xy + yz + x + y + 3z)$$

*are în punctul* $M_0(-3,5,-8)$ *un minim global strict.*

# 1.2 Funcţii definite implicit

## 1.2.1 Exemple şi exerciţii rezolvate

**Exemplul 1.2.1** *Dacă* $F \in C^2(D_0)$ *şi* $y = f(x)$ *este funcţia definită implicit de ecuaţia* $F(x,y) = 0$, *atunci*

$$f''(x) = -\frac{F_{,xx}(F_{,y})^2 - 2F_{,xy}\,F_{,x}\,F_{,y} + F_{,yy}\,(F_{,x})^2}{(F_{,y})^3}(x, f(x))\cdot$$

**Soluţie.** Într-adevăr, din teorema de existenţă şi unicitate a unei funcţii reale $y = f(x)$, de o variabilă reală, definită implicit de ecuaţia $F(x,y) = 0$ rezultă mai întâi

$$f'(x) \;=\; -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))} \;=\; -\frac{F_{,x}(x,f(x))}{F_{,y}(x,f(x))}.$$

Pentru a calcula derivata secundă a funcţiei $f$, aplicăm operaţia de derivare în această egalitate. Avem

$$f''(x) \;=\; (f')'(x) \;=\; -\left(\frac{F_{,x}(x,f(x))}{F_{,y}(x,f(x))}\right)'.$$

Calculăm această derivată folosind regula de derivare a câtului şi regula de derivare a funcţiilor compuse după care înlocum valoarea lui $f'(x)$. În acest mod constatăm că se obţine rezultatul dorit. ∎

**Exerciţiul 1.2.1** Să *se arate că ecuaţia*

$$F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^4 - \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2) - 3xy = 0,$$

*defineşte implicit funcţia reală de două variabile reale* $z = f(x,y)$ *într–o vecinătate a punctului* $M_0\Big(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{6}}{2}\Big)$ *şi apoi să se calculeze* $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\Big(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\Big)$.

**Soluţie.** Trebuie să verificăm că sunt îndeplinite ipotezele teoremei de existenţă şi unicitate a unei funcţii definite implicit de ecuaţia $F(x,y,z)=0$. Aceste ipoteze sunt:

- funcţia $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ trebuie să fie de clasă cel puţin $C^3(\mathbb{R}^3)$;
- în punctul $M_0$ trebuie ca $F(M_0)=0$;
- derivata parţială în raport cu variabila $z$ a funcţiei $F$ în punctul $M_0$ trebuie să fie nenulă.

Funcţia $F$, fiind o funcţie polinom, este de clasă $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, deci prima dintre ipoteze este verificată.

Constatăm că $F(M_0)=F\Big(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{6}}{2}\Big)=0$, ceea ce arată că şi a doua ipoteză este verificată.

Derivata parţială de ordinul întâi a funcţiei $F$ într–un punct oarecare din $\mathbb{R}^3$ este

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)b=4z^3-3z,$$

iar valoarea acesteia în punctul $M_0$,

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)=\frac{3\sqrt{6}}{2},$$

este diferită de zero şi prin urmare ultima ipoteză este satisfăcută.

Conform teoremei de existenţă şi unicitate a unei funcţii reale de două variabile reale definită implicit de ecuaţia $F(x,y,z)=0$, există un disc închis $\overline{B}\Big((x_0,y_0),h\Big)$ cu centrul în punctul $(x_0,y_0)$ şi raza $h>0$, un număr $k>0$ şi o unică funcţie

$$f:\overline{B}\Big((x_0,y_0),h\Big)\to[z_0-k,z_0+k],$$

de trei ori diferenţiabilă, care satisface condiţia $f(x_0,y_0)=z_0$ şi identitatea

$$F(x,y,f(x,y))\equiv 0 \quad \text{pe mulţimea} \quad \overline{B}\Big((x_0,y_0),h\Big).$$

Pentru a obţine derivata menţionată în enunţ, procedăm astfel:

- derivăm identitatea $F(x,y,f(x,y))\equiv 0$ în raport cu $y$ şi în raport cu $x$ după care luăm $x=x_0$ şi $y=y_0$, de aici rezultând $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ şi respectiv $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$;

- identităţilor obţinute li se aplică operaţia de derivare în raport cu $x$, de aici calculându–se $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)$ şi respectiv $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)$;
- aplicând penultimei identităţi operaţia de derivare parţială în raport cu $x$ se determina derivata parţială de ordinul al treilea a funcţiei $f$ menţionată în enunţ.

Având în vedere expresia funcţiei $F$ rezultă că identitatea care urmează a fi derivată parţial conform procedeului descris este

$$x^3+y^3+\Big(f(x,y)\Big)^4-\frac{3}{2}\Big(x^2+y^2+\Big(f(x,y)\Big)^2\Big)-3xy\equiv 0.$$

Cele cinci identităţi obţinute prin derivările specificate sunt:

$$\begin{cases} 3(y^2-y-x)+(4f^3(x,y)-3f(x,y))\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\equiv 0,\\[2mm] 3(x^2-x-y)+(4f^3(x,y)-3f(x,y))\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\equiv 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases} -3+3(4f^2(x,y)-1)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)+(4f^3(x,y)-3f(x,y))\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\equiv 0,\\[2mm] 3(2x-1)+3(4f^2(x,y)-1)\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Big)^2+(4f^3(x,y)-3f(x,y))\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\equiv 0;\end{cases}$$

$$\begin{array}{l} 24f(x,y)\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Big)^2\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)+(4f^3(x,y)-3f(x,y))\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x,y)+\\[2mm] +3(4f^2(x,y)-1)\Big(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)+2\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\Big)\equiv 0.\end{array}$$

Din primele două seturi de identităţi se obţin derivatele:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial y}\Big(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\Big)=-\dfrac{\sqrt{6}}{12};\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial x}\Big(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\Big)=-\dfrac{\sqrt{6}}{12};\end{cases}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Big(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\Big)=\dfrac{19\sqrt{6}}{72};\\[2mm] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\Big)=-\dfrac{5\sqrt{6}}{72},\end{cases}$$

iar din ultima identitate se obţine

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\Big(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\Big)\;=\;\frac{59\sqrt{6}}{144},$$

care este derivata parţială din enunţ. ■

**Exerciţiul 1.2.2** *Funcţia* $z = z(x, y)$ *este definită implicit de ecuaţia* $F(x, y, z) = 0$, *unde*

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - \varphi(\alpha x + \beta y + \gamma z),$$

$\alpha, \beta$ *şi* $\gamma$ *fiind constante reale arbitrare, iar* $u \mapsto \varphi(u)$ *o funcţie reală diferenţiabilă pe un innterval* $I \subset I\!R$.

*Să se arate că derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei* $z = z(x, y)$ *satisface egalitatea*

$$(\gamma\, y - \beta\, z)\frac{\partial z}{\partial x} + (\alpha\, z - \gamma\, x)\frac{\partial z}{\partial y} = \beta\, x - \alpha\, y.$$

**Soluţie.** În ipotezele menţionate, funcţia $F$ este derivabilă şi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) &= 2x - \dfrac{d\varphi}{du} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x - \alpha\, \varphi'(u) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) &= 2y - \dfrac{d\varphi}{du} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y - \beta\, \varphi'(u) \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) &= 2z - \dfrac{d\varphi}{du} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial z} = 2z - \gamma\, \varphi'(u), \end{cases}$$

unde am făcut notaţia $u = \alpha\, x + \beta\, y + \gamma\, z$.

Derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei $z = z(x, y)$, definită implicit de ecuaţia $F(x, y, z) = 0$, sunt

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y, z(x, y))}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x, y, z(x, y))}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y, z(x, y))}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x, y, z(x, y))}.$$

Înlocuind aceste derivate parţiale de ordinul întâi ale funcţiei $F$, calculate în punctul $(x, y, z(x, y))$, găsim că derivatele parţiale ale funcţiei $z = z(x, y)$ au expresiile

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}(x, y) &= -\dfrac{2x - \alpha\, \varphi'(u(x, y, z(x, y)))}{2z - \gamma\, \varphi'(u(x, y, z(x, y)))}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}(x, y) &= -\dfrac{2y - \beta\, \varphi'(u(x, y, z(x, y)))}{2z - \gamma\, \varphi'(u(x, y, z(x, y)))}, \end{cases}$$

unde $u(x,y,z(x,y)) = \alpha\, x + \beta\, y + \gamma\, z(x,y)$.

Înmulţind derivata parţială a lui $z$ în raport cu variabila $x$ cu $\gamma\, y - \beta\, z(x,y)$ şi cealaltă derivată parţială a funcţiei $z = z(x,y)$ cu $\alpha\, z(x,y) - \gamma\, x$ şi sumând rezultatele, găsim că

$$(\gamma\, y - \beta\, z(x,y))\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) + (\alpha\, z(x,y) - \gamma\, x)\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = \beta\, x - \alpha\, y,$$

ceea ce arată că funcţia $z = z(x,y)$ satisface egalitatea din enunţ. ■

**Exemplul 1.2.2** *Funcţia* $F(x,y,z) = \Phi\Big(x + \dfrac{z}{y}, y + \dfrac{z}{x}\Big)$*, unde* $\Phi$ *este o funcţie diferenţiabilă pe un domeniu* $D \subset I\!R^2$*, este astfel încât ecuaţia* $F(x,y,z) = 0$ *defineşte implicit funcţia diferenţiabilă* $z = z(x,y)$*.*

*Derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei* $z$ *satisfac egalitatea*

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy.$$

**Soluţie.** Într-adevăr, ştiind că există derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei definite implicit de ecuaţia $F(x,y,z) = 0$, acestea se calculează după regula

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) \;=\; -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,z(x,y))}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) \;=\; -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,z(x,y))}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))}.$$

Pentru a determina derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei $F$, folosim regula lanţului de derivare a funcţiilor compuse. Notând în prealabil cu $u$ şi $v$ variabilele funcţiei $\Phi$ şi aplicând această regulă, obţinem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial u} - \dfrac{z}{x^2}\dfrac{\partial \Phi}{\partial v}; \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial v} - \dfrac{z}{y^2}\dfrac{\partial \Phi}{\partial u}; \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial z} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial z} = \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial \Phi}{\partial u} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial \Phi}{\partial v}. \end{cases}$$

Atunci, derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei $z$ vor fi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial u} - \dfrac{z}{x^2}\dfrac{\partial \Phi}{\partial v}}{\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial \Phi}{\partial u} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial \Phi}{\partial v}} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial v} - \dfrac{z}{y^2}\dfrac{\partial \Phi}{\partial u}}{\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial \Phi}{\partial u} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial \Phi}{\partial v}}. \end{cases}$$

Înmulţind aceste expresii cu $x$ şi respectiv $y$ şi adunând membru cu membru rezultatele înmulţirii constatăm că egalitatea din enunţ este satisfăcută. ■

**Exerciţiul 1.2.3** *Să se arate că funcţia $z = z(x, y)$ definită implicit de ecuaţia*

$$\Phi(x - az, y - bz) = 0, \quad a, b \in I\!R, \quad \textit{fixaţi}, \quad F \in C^1(D), \quad D \subset I\!R^2,$$

*verifică relaţia*

$$a \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) + b \cdot zy(x, y) = 1.$$

**Soluţie.** Vom nota $F(x, y, z) = \Phi(x - az, y - bz)$ precum şi $u = x - az$, $v = y - bz$. În felul acesta funcţia $\Phi$ are variabilele $u$ şi $v$. Determinăm derivatele parţiale ale funcţiei $F$ folosind regula lanţului de derivare a unei funcţii compusă. Avem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = \dfrac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial u} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = \dfrac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = \dfrac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial z} = -a \cdot \dfrac{\partial \Phi}{\partial u} - b \cdot \dfrac{\partial \Phi}{\partial v}. \end{cases}$$

Derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei $z = z(x, y)$, definită implicit de ecuaţia $F(x, y, z) = 0$, se calculează după regula

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y, z(x, y))}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x, y, z(x, y))}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y, z(x, y))}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x, y, z(x, y))}.$$

Folosind rezultatele precedente găsim că

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}(x,y) &= \dfrac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial u}}{a\cdot\dfrac{\partial \Phi}{\partial u}+b\cdot\dfrac{\partial \Phi}{\partial v}}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}(x,y) &= \dfrac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial v}}{a\cdot\dfrac{\partial \Phi}{\partial u}+b\cdot\dfrac{\partial \Phi}{\partial v}}. \end{cases}$$

Examinând expresiile acestor derivate parţiale constatăm că

$$a\cdot\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)+b\cdot\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=1$$

şi deci funcţia $z=z(x,y)$ satisface egalitatea din enunţ. ■

**Exemplul 1.2.3** E*cuaţia* $\Phi\Big(\dfrac{x}{z},\dfrac{y}{z}\Big)=0$ *defineşte implicit funcţia reală diferenţiabilă* $z=z(x,y)$. *Derivatele parţiale de ordinul întâi ale acesteia satisfac ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale de ordinul întâi*

$$x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=z.$$

**Soluţie.** Într-adevăr, notând $F(x,y,z)=\Phi\Big(\dfrac{x}{z},\dfrac{y}{z}\Big)$ şi aplicând formulele de calcul ale derivatelor parţiale de ordinul întâi ale funcţiei $z=z(x,y)$, definită implicit de ecuaţia $F(x,y,z)=0$, găsim

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}(x,y) &= \dfrac{z(x,y)\cdot\Phi_{,1}(u,v)}{x\cdot\Phi_{,1}(u,v)+y\cdot\Phi_{,2}(u,v)} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}(x,y) &= \dfrac{z(x,y)\cdot\Phi_{,2}(u,v)}{x\cdot\Phi_{,1}(u,v)+y\cdot\Phi_{,2}(u,v)}. \end{cases}$$

Variabilele intermediare $u$ şi $v$ ale funcţiei $\Phi$, notate la un moment dat cu 1 şi 2, sunt funcţii de $x,y$ şi $z$, însă în relaţiile de mai sus $z$ se consideră că fiind înlocuit cu expresia sa rezultată din ecuaţia $F(x,y,z)=0$, adică

$$u(x,y,z(x,y))=\frac{x}{z(x,y)},\quad v(x,y,z(x,y))=\frac{y}{z(x,y)}.$$

Se vede imediat că $x \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x}(x,y) + y \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y}(x,y) \equiv z(x,y)$, ceea ce arată că $z = z(x,y)$ este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale cu derivate parţiale de ordinul întâi din enunţ. ■

**Exemplul 1.2.4** Funcţi*a reală* $F \in \mathcal{F}(D)$ *de clasă* $C^1$ *pe mulţimea deschisă* $D \subset I\!\!R^3$ *este astfel încât:*

$$F(x_0,y_0,z_0)=0;\ \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\neq 0;\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\neq 0,\ \frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0.$$

*Dacă funcţiile reale:*

$$x = f(y,z); \quad y = g(z,x); \quad z = h(x,y)$$

*sunt soluţiile ecuaţiei* $F(x,y,z) = 0$ *care satisfac condiţiile iniţiale:*

$$x_0 = f(y_0,z_0),\ y_0 = g(z_0,x_0),\ z_0 = h(x_0,y_0),$$

*atunci*

$$\frac{\partial f}{\partial z}(y_0,z_0)\cdot\frac{\partial g}{\partial x}(z_0,x_0)\cdot\frac{\partial h}{\partial y}(x_0,y_0) = -1.$$

Într-adevăr, deoarece

$$F \in C^1(D),\ F(x_0,y_0,z_0) = 0 \ \text{ şi } \ \frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0,$$

rezultă că ecuaţia $F(x,y,z) = 0$ defineşte implicit funcţia $z = h(x,y)$ într–o vecinătate a punctului $(x_0,y_0)$ şi

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}\cdot$$

În mod similar deducem:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(z_0,y_0) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)};$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(y_0, z_0) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}.$$

Înmulţind membru cu membru aceste trei egalităţi se obţine relaţia dorită.■

**Exemplul 1.2.5** F*ie* $\mathbf{F} = (F_1, F_2) \in \mathcal{F}(I\!R^5, I\!R^2)$, *unde*

$$F_1(x, y, z, y_1, y_2) = x + yz - y_1 y_2 - y_1^2, \quad F_2(x, y, z, y_1, y_2) = x - y + y_1^3 - y_2^3.$$

*Să se arate că sistemul de ecuaţii*

$$\begin{cases} F_1(x, y, z, y_1, y_2) = 0, \\ F_2(x, y, z, y_1, y_2) = 0, \end{cases}$$

*defineşte implicit pe* $y_1$ *şi* $y_2$ *ca funcţii de variabilele* $x, y, z$ *într–o vecinătate a punctului* $(1, 1, 1, 1, 1) \in I\!R^5$ *şi să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întâi ale acestor funcţii în punctul* $(1, 1, 1) \in I\!R^3$.

**Soluţie.** Într-adevăr, din expresiile algebrice ale componentelor funcţiei $\mathbf{F}$ se vede că $\mathbf{F} \in C^\infty(I\!R^5, I\!R^2)$. Apoi, există punctul $(1, 1, 1, 1, 1) \in I\!R^5$, cu proprietatea

$$\mathbf{F}(1, 1, 1, 1, 1) = 0.$$

Matricea jacobiană $J_{\mathbf{yF}}(x, y, z, y_1, y_2)$, unde $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, este

$$J_{\mathbf{yF}}(x, y, z, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_2 - 2y_1 & -y_1 \\ 3y_1^2 & -3y_2^2 \end{pmatrix}.$$

Determinantul acestei matrice este jacobianul

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(y_1, y_2)}(x, y, z, y_1, y_2) = 3y_1^3 + 3y_2^3 + 6y_1 y_2^2.$$

Se vede că

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(y_1, y_2)}(1, 1, 1, 1, 1) \neq 0.$$

Prin urmare, într-o vecinătate $V_0$ a punctului $\mathbf{x}_0 = (1,1,1) \in I\!R^3$ există funcţiile $f_1, f_2$ de clasă $C^\infty$ cu proprietăţile:

$$f_1(1,1,1) = 1, \qquad f_2(1,1,1) = 1;$$

$$\begin{cases} F_1(x,y,z,f_1(x,y,z),f_2(x,y,z)) &= 0, \\ F_2(x,y,z,f_1(x,y,z),f_2(x,y,z)) &= 0, \quad (\forall)\ (x,y,z) \in V_0. \end{cases}$$

Derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiilor $f_1$ şi $f_2$ se obţin din sistemele algebrice:

$$\begin{cases} 1 - \dfrac{\partial f_1}{\partial x} f_2 - f_1 \dfrac{\partial f_2}{\partial x} - 2f_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x} = 0, \\ 1 + 3f_1^2 \dfrac{\partial f_1}{\partial x} - 3f_2^2 \dfrac{\partial f_2}{\partial x} = 0; \end{cases}$$
$$\begin{cases} z - f_2 \dfrac{\partial f_1}{\partial y} - f_1 \dfrac{\partial f_2}{\partial y} - 2f_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial y} = 0, \\ -1 + 3f_1^2 \dfrac{\partial f_1}{\partial y} - 3f_2^2 \dfrac{\partial f_2}{\partial y} = 0; \end{cases}$$
$$\begin{cases} y - f_2 \dfrac{\partial f_1}{\partial z} - f_1 \dfrac{\partial f_2}{\partial z} - 2f_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial z} = 0, \\ 3f_1^2 \dfrac{\partial f_1}{\partial z} - 3f_2^2 \dfrac{\partial f_2}{\partial z} = 0. \end{cases},$$

care se deduc derivând succesiv în raport cu $x, y$ şi $z$ egalitatea $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \equiv \mathbf{0}$, unde $\mathbf{x} = (x,y,z)$ iar $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$.

Rezolvând aceste sisteme şi făcând apoi în soluţiile găsite $x = y = z = 1$, obţinem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(1,1,1) = \dfrac{1}{6}, & \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(1,1,1) = \dfrac{1}{2}; \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(1,1,1) = \dfrac{1}{3}, & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(1,1,1) = 0; \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial z}(1,1,1) = \dfrac{1}{4}, & \dfrac{\partial f_2}{\partial z}(1,1,1) = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

De remarcat că aceste rezultate se puteau obţine şi direct utlizând formulele de derivare parţială a unei funcţii vectoriale de variabilă vectorială definită implicit de ecuaţia vectorială $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$. ■

**Exercițiul 1.2.4** C*alculați derivatele parțiale* $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x,y)$ *și* $\dfrac{\partial z}{\partial y}(x,y)$, *unde* $z = z(x,y)$ *este funcția definită implicit de ecuația* $\Phi(x+y+z, x^2+y^2+z^2) = 0$, *iar funcția* $(u,v) \mapsto \Phi(u,v)$ *admite derivate parțiale continue pe mulțimea* $D$ *deschisă în* $I\!R^2$.

**Soluție.** Introducem notațiile

$$F(x,y,z) = \Phi(x+y+z, x^2+y^2+z^2), \qquad \begin{cases} u &= u(x,y,z) = x+y+z, \\ v &= v(x,y,z) = x^2+y^2+z^2. \end{cases}$$

Cu aceste notații rezultă că funcția $z = z(x,y)$ este definită implicit de ecuația $F(x,y,z) = 0$ și satisfac identitatea

$$F(x,y,z(x,y)) \equiv 0$$

pe o submulțime a spațiului $I\!R^2$ care rezultă în urma aplicării teoremei de existență și unicitate a unei funcții reale de două variabile reale definită implicit de ecuația de mai sus.

Pentru a obține prima dintre derivatele menționate în enunț, derivăm identitatea de mai sus în raport cu $x$ ținând cont că

$$F(x,y,z(x,y)) = \Phi(u(x,y,z(x,y)), v(x,y,z(x,y)))$$

și folosind pentru aceasta regula lanțului de derivare a funcțiilor compuse. Avem:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} \equiv 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial \Phi}{\partial u}\cdot\Big(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\Big) + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\cdot\Big(2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x}\Big) \equiv .0$$

Din ultima identitate determinăm expresia primei derivate

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial u}(u(x,y,z(x,y)), v(x,y,z(x,y))) + 2x\dfrac{\partial \Phi}{\partial v}(u(x,y,z(x,y)), v(x,y,z(x,y)))}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial u}(u(x,y,z(x,y)), v(x,y,z(x,y))) + 2z\dfrac{\partial \Phi}{\partial v}(u(x,y,z(x,y)), v(x,y,z(x,y)))}.$$

Schema de calcul de mai sus se poate aplica și în privința variabilei $y$ obținând în acest mod

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial u}(u(x,y,z(x,y)), v(x,y,z(x,y))) + 2y\dfrac{\partial \Phi}{\partial v}(u(x,y,z(x,y)), v(x,y,z(x,y)))}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial u}(u(x,y,z(x,y)), v(x,y,z(x,y))) + 2z\dfrac{\partial \Phi}{\partial v}(u(x,y,z(x,y)), v(x,y,z(x,y)))}.$$

În expresiile acestor derivate trebuie avut în vedere că

$$u(x,y,z(x,y)) = x + y + z(x,y), \quad v(x,y,z(x,y)) = x^2 + y^2 + z^2(x,y)$$

aceste egalităţi rezultând din expresiile concrete ale variabilelor intermediare $u$ şi $v$. ■

**Exemplul 1.2.6** *Sistemul de ecuaţii*

$$\begin{cases} x + y + z & = & 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 & = & 0 \end{cases}$$

*defineşte implicit, în anumite condiţii, funcţiile $x = x(z)$ şi $y = y(z)$. Concluziile teoremei de existenţă şi unicitate a unui sistem de funcţii reale de o variabilă reală definit implicit de acest sistem de ecuaţii permit calculul derivatelor funcţiilor sistemului.*

**Soluţie.** Într-adevăr, funcţiile $F_1(x,y,z) = x + y + z$ şi $F_2(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ sunt de clasă $C^\infty(I\!R^3)$. În orice punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ care satisface sistemul din enunţ şi pentru care $x_0 \neq y_0$, determinantul funcţional

$$\frac{D(F_1,F_2)}{D(x,y)}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{vmatrix} = y - x$$

este diferit de zero. Ca urmare, într–o vecinătatea punctului $M_0$ în care $x \neq y$, sistemul din enunţ defineşte funcţiile infinit diferenţiabile $x = x(z)$ şi $y = y(z)$. Aceste funcţii satisfac sistemul

$$\begin{cases} x(z) + y(z) + z & = & 0 \\ x^2(z) + y^2(z) + z^2 & = & 1. \end{cases}$$

Să derivăm ambele ecuaţii ale acestui sistem. Obţinem sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dz}(z) + \dfrac{dy}{dz}(z) & = & -1 \\ x(z) \cdot \dfrac{dx}{dz}(z) + y(z) \cdot \dfrac{dy}{dz}(z) & = & -z. \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem, găsim

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dz}(z) & = & \dfrac{y(z)-z}{x(z)-y(z)}, \\ \dfrac{dy}{dz}(z) & = & \dfrac{z-x(z)}{x(z)-y(z)}. \end{cases}$$

Prin derivarea expresiilor acestor derivate se pot obţine derivatele de orice ordin ale funcţiilor $x = x(z)$ şi $y = y(z)$. ■

**Exerciţiul 1.2.5** A*rătaţi că funcţia* $z = z(x, y)$ *definită implicit de ecuaţia*

$$x\varphi(z) + \psi(z) - y = 0,$$

*unde* $\varphi, \psi \in C^2(I)$, $I \subset I\!R$, *satisface ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale de ordinul al doilea, neliniară*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big(\frac{\partial z}{\partial y}\Big)^2 - 2\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2 = 0.$$

**Soluţie.** Dacă $z = z(x, y)$ este funcţia definită implicit de ecuaţia

$$F(x, y, z) = x\varphi(z) + \psi(z) - y = 0,$$

atunci are loc identitatea $F(x, y, z(x, y)) \equiv 0$, adică

$$x\varphi(z(x, y)) + \psi(z(x, y)) - y \equiv 0,$$

pe care o vom deriva parţial în raport cu ambele variabile independente $x$ şi $y$, folosind de fiecare dată regula lanţului de derivare a unei funcţii compuse de două variabile. Obţinem:

$$\begin{cases} \varphi(z(x,y)) + x\varphi'(z(x,y))\dfrac{\partial z}{\partial x}(x,y) + \psi'(z(x,y))\dfrac{\partial z}{\partial x}(x,y) & = & 0; \\ x\varphi'(z(x,y))\dfrac{\partial z}{\partial y}(x,y) + \psi'(z(x,y))\dfrac{\partial z}{\partial y}(x,y) - 1 & = & 0. \end{cases}$$

Din aceste egalităţi rezultă derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei $z = z(x, y)$ :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}(x,y) & = & -\dfrac{\varphi(z(x,y))}{x\varphi'(z(x,y)) + \psi'(z(x,y))}; \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}(x,y) & = & \dfrac{1}{x\varphi'(z(x,y)) + \psi'(z(x,y))}. \end{cases}$$

Pentru a obţine mai rapid derivatele parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei $z = z(x,y)$, derivăm expresiile derivatelor parţiale de ordinul întâi ale funcţiei, prima în raport cu $x$ şi apoi cu $y$, iar a doua în raport cu $y$. Deoarece în expresiile astfel găsite vor apare derivatele parţiale de ordinul ântâi, acestea se vor înlocui cu expresiile lor. În felul acesta se obţin derivatele parţiale de ordinul al doilea. De notat că peste tot unde apare variabila $z$ ea trebuie considerată ca fiind $z(x,y)$. Expresiile acestor derivate secunde sunt:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y) &= \dfrac{2(x\varphi'(z)+\psi'(z))\varphi(z)\varphi'(z)-(x\varphi''(z)+\psi''(z))\varphi^2(z)}{(x\varphi'(z)+\psi'(z))^3}; \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(x,y) &= \dfrac{(x\varphi''(z)+\psi''(z))\varphi(z)-(x\varphi'(z)+\psi'(z))\varphi'(z)}{(x\varphi'(z)+\psi'(z))^3}; \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y) &= -\dfrac{x\varphi''(z)+\psi''(z)}{(x\varphi'(z)+\psi'(z))^3}. \end{cases}$$

Pentru a arăta că funcţia $z = z(x,y)$ este soluţia ecuaţiei diferenţiale din enunţ, să observăm în prealabil că

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y)\Big(\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\Big)^2 - 2\,\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(x,y) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y)\Big(\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\Big)^2 =$$
$$= \frac{1}{(x\varphi'(z)+\psi'(z))^2}\Big(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y) + 2\,\varphi(z(x,y))\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(x,y) + \varphi^2(z(x,y))\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y)\Big).$$

Verificarea faptului că $z = z(x,y)$ este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale este de acum o banalitate. ∎

**Exerciţiul 1.2.6** *Să se găsească câţiva termeni a dezvoltării după puterile lui $x-1$ şi $y-1$ a funcţiei $(x,y)\mapsto z(x,y)$ definită implicit de ecuaţia*

$$F(x,y,z) = z^3 + yz - xy^2 - x^3 = 0.$$

**Soluţie.** Observăm că ecuaţia $F(x,y,z) = 0$ defineşte implicit funcţia infinit diferenţiabilă $(x,y)\mapsto z(x,y)$ într–o vecinătate a punctului $(1,1,1)$ şi aceasta pentru că $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, $F(1,1,1) = 0$, iar derivata parţială a funcţiei $F$ în raport cu $z$ în punctul $(1,1,1)$ este diferită de zero. Funcţia $(x,y)\mapsto z(x,y)$ are proprietăţile: $z(1,1) = 1$; $F(x,y,z(x,y)) \cong 0$; este diferenţiabilă de orice ordin; diferenţialele de diverse ordine se pot determina diferenţiind de câte ori avem nevoie identitatea $F(x,y,z(x,y)) \cong 0$.

Dacă impunem ca dezvoltarea funcţiei $(x,y)\mapsto z(x,y)$ după puterile binoamelor $x-1$ şi $y-1$ să conţină termeni de cel mult gradul al doilea, atunci aceasta poate rezulta din formula lui Taylor cu restul de ordinul doi

$$\begin{aligned} z(x,y) &= z(1,1)+dz((1,1);(x-1,y-1))+\\ &+ \frac{1}{2}d^2z((1,1);((x-1,y-1),(x-1,y-1)))+\\ &+ \frac{1}{6}d^3z((\xi,\eta);(x-1,y-1),(x-1,y-1),(x-1,y-1)), \end{aligned}$$

unde punctul $(\xi,\eta)$ aparţine segmentului deschis cu extremităţile în punctele $(1,1)$ şi $(x,y)$.

După neglijarea restului, se obţine formula aproximativă

$$z(x,y)\cong z(1,1)+dz((1,1);(x-1,y-1))+\frac{1}{2}d^2z((1,1);((x-1,y-1),(x-1,y-1))).$$

Pentru determinarea celor două diferenţiale, diferenţiem de două ori identitatea $F(x,y,z(x,y))\cong 0$. Se obţine:

$$\begin{aligned} (3z^2+y)dz &= (3x^2+y^2)dx+(2xy-z)dy;\\ (3z^2+y)d^2z &= 6xdx^2+4ydxdy+2xdy^2-2dydz-6zdz^2. \end{aligned}$$

De aici se obţin diferenţialele funcţiei $(x,y)\mapsto z(x,y)$ în punctul $(1,1)$

$$\begin{aligned} dz(1,1) &= dx+\frac{1}{4}dy,\\ d^2z(1,1) &= -\frac{1}{4}dxdy+\frac{9}{64}dy^2. \end{aligned}$$

Considerând că $dx=x-1$ şi $dy=y-1$ obţinem în final formula de aproximare

$$z(x,y)\cong 1+(x-1)+\frac{1}{4}(y-1)-\frac{1}{8}(x-1)(y-1)+\frac{9}{64}(y-1)^2,$$

pentru valori mici ale lui $|x-1|$ şi $|y-1|$. ∎

### 1.2.2 Exemple şi exerciţii propuse

**Exerciţiul 1.2.7** *Să se arate că funcţia* $z = f(x,y)$ *definită implicit de ecuaţia*

$$G\Big(\frac{x-x_0}{z-z_0}, \frac{y-y_0}{z-z_0}\Big) = 0,$$

*verifică relaţia*

$$(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f(x,y) - z_0.$$

**Exerciţiul 1.2.8** *Să se arate că funcţia* $z = f(x,y)$ *definită implicit de ecuaţia*

$$G(x+y+z, x^2+y^2+z^2) = 0,$$

*verifică ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale de ordinul întâi*

$$(y - f(x,y))\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + (f(x,y) - x)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x - y.$$

**Exerciţiul 1.2.9** *Să se arate că funcţia* $z = z(x,y)$, *definită implicit de ecuaţia*

$$F(x,y,z) = (z+y)\sin z - y(x+z) = 0,$$

*satisface ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale de ordinul întâi*

$$z\sin z\frac{\partial z}{\partial x} - y^2\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

**Răspuns**. Derivatele parţiale ale funcţiei $z$ sunt

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{\sin z + (z+y)\cos z - y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x+z-\sin z}{\sin z + (z+y)\cos z - y}$$

iar pentru a demonstra că acestea verifică ecuaţia dată se ţine cont de faptul că $z = z(x,y)$ satisface identitatea $F(x,y,z(x,y)) = 0$. ■

**Exemplul 1.2.7** *Funcţia* $z = z(x,y)$, *definită implicit de ecuaţia* $F(x,y,z) = 0$, *unde*

$$F(x,y,z) = y(x+z) - (y+z)f(z),$$

*iar* $f$ *este o funcţie reală de variabilă reală, diferenţiabilă, satisface identitatea*

$$z(x+z)\frac{\partial z}{\partial x} - y(y+z)\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

**Indicaţie**. Se calculează derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei $z = z(x,y)$ după formulele

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$$

şi în final se foloseşte faptul că funcţia $z$ satisface ecuaţia $F(x,y,z) = 0$. ■

**Exemplul 1.2.8** *Funcţia $z = z(x,y)$, definită implicit de ecuaţia*

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2xz - 2yf(z) = 0,$$

*satisface ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale*

$$(y^2 - x^2 + 2xz)\frac{\partial z}{\partial x} + 2y(z-x)\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

**Exerciţiul 1.2.10** S*e dă ecuaţia*

$$F(x+2y, y-2x) = 1$$

*care defineşte pe $y$ ca funcţie de $x$. În ipoteza că $F$ admite derivate parţiale de ordinul doi continue în domeniul $D \subset I\!R^2$, să se calculeze $y'$ şi $y''$.*

**Indicaţie**. Notăm $x + 2y = u$, $y - 2x = v$ şi derivăm de două ori identitatea

$$F(u(x), v(x)) - 1 \equiv 0,$$

unde $u(x) = x + 2y(x)$, $v(x) = y(x) - 2x$.
**Răspuns**.

$$y'(x) = \frac{2F_{,v}(u(x),v(x)) - F_{,u}(u(x),v(x))}{2F_{,u}(u(x),v(x)) + F_{,v}(u(x),v(x))};$$

$$y''(x) = -\frac{F_{,uu}\cdot(u'(x))^2 + 2F_{,uv}\cdot u'(x)\cdot v'(x)) + F_{,vv}\cdot(v'(x))^2}{2F_{,u}(u(x),v(x)) + F_{,v}(u(x),v(x))},$$

în care $u'(x) = 1 + 2y'(x)$, $v'(x) = y'(x) - 2$, urmând ca derivata $y'(x)$ să fie înlocuită cu expresia sa de mai sus. ■

**Exerciţiul 1.2.11** *Funcţia* $(u,v)\mapsto F(u,v)$ *este astfel încât ecuaţia*

$$F(y+\sin x,\ x+\cos y)=0$$

*defineşte implicit funcţia* $x\mapsto y(x)$, *de două ori derivabilă. Să se calculeze derivatele* $y'(x)$ *şi* $y''(x)$.

**Indicaţie**. Se derivează de două ori identitatea

$$F(y(x)+\sin x,\ \ x+\cos y(x))\equiv 0$$

folosind regulile de derivare ale funcţiei compuse $f(x)=F(u(x),v(x))$ în care:

$$u(x)=y(x)+\sin x;\quad v(x)=x+\cos y(x).$$

Prima derivată rezultă din

$$F_{u}(u(x),v(x))\cdot(y'(x)+\cos x)+F_{,v}(u(x),v(x))\cdot(1-y'(x)\sin x)\equiv 0,$$

iar cea de a doua din

$$F_{,uu}(u(x),v(x))\cdot(u'(x))^2+2F_{,uv}(u(x),v(x))\cdot u'(x)\cdot v'(x)+$$
$$+F_{,vv}(u(x),v(x))\cdot(v'(x))^2+F_{,u}(u(x),v(x))\cdot u''(x)+F_{,v}(u(x),v(x))\cdot v''(x)\equiv 0.$$

**Răspuns**.

$$y'(x)=\frac{F_{,u}(u(x),v(x))\cos x+F_{,v}}{F_{,v}(u(x),v(x))\sin y(x)-F_{,u}(u(x),v(x))};$$

$$y''=\frac{E(F_{,u},F_{,v},F_{,uu},F_{,uv},F_{,vv})}{(F_{,v}\sin y(x)-F_{,u})^3},$$

unde $E(F_{,u},F_{,v},F_{,uu},F_{,uv},F_{,vv})$ este un polinom de gradul al treilea cu coeficienţi funcţii de $x$. ■

**Exerciţiul 1.2.12** Să *se afle derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiilor*

$$(x,y)\mapsto u(x,y),\ \ (x,y)\mapsto v(x,y)$$

*definite implicit de sistemul*

$$\begin{cases} F_1(x,y,u,v) &= x-u^2-v &= 0,\\ F_2(x,y,u,v) &= y^2-uv+v^2 &= 0.\end{cases}$$

**Indicaţie**. Se poate proceda pe două căi: fie aplicând formulele care dau derivatele parţiale menţionate în enunţ, fie derivând sistemul dat întâi în raport cu variabila $x$ şi apoi cu $y$ şi rezolvând sistemele obţinute în care necunoscute sunt derivatele parţiale ale funcţiilor $u$ şi $v$.
**Răspuns**.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{u-2v}{2u^2-4uv-v}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{2y}{4uv+v-2u^2}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{v}{4uv+v-2u^2}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{4uy}{2u^2-4uv-v}. \end{cases}$$

Variabilele $u$ şi $v$ din membrul doi sunt funcţii de $x$ şi $y$. ■

**Exerciţiul 1.2.13** *Să se calculeze diferenţialele $du$ şi $dv$ ale funcţiilor $u = u(x,y)$ şi $v = v(x,y)$, definite implicit de sistemul:*

$$e^u + u\sin v = x; \quad e^u - u\cos v = y.$$

**Indicaţie**. Se diferenţiază în ambii membri ai ecuaţiilor sistemului şi se rezolvă sistemul obţinut în care necunoscutele sunt diferenţialele $du$ şi $dv$.
**Răspuns**.

$$\begin{aligned} du &= \frac{\sin v}{1+(\sin v-\cos v)e^u}dx - \frac{\cos v}{1+(\sin v-\cos v)e^u}dy, \\ dv &= \frac{e^u+\sin v}{u[1+(\sin v-\cos v)e^u]}dx - \frac{e^u-\cos v}{u[1+(\sin v-\cos v)e^u]}dy, \end{aligned}$$

în care se ţine cont că $u$ şi $v$ sunt funcţii de $x$ şi $y$. ■

**Exerciţiul 1.2.14** *Să se calculeze diferenţialele de ordinul întâi şi doi ale funcţiei $z = z(x,y)$, definită implicit de ecuaţia $F(x,y,z) = 0$, unde*

$$F(x,y,z) = \Phi(x+z, y+z),$$

*iar $(u,v) \to \Phi(u,v)$ este o funcţie diferenţiabilă de două ori pe un domeniu $D \subset I\!R^2$.*

**Indicaţie**. Se notează $u = x+z$, $v = y+z$, se diferenţiază de două ori egalitatea $\Phi(u,v) = 0$ şi se ţine cont că $du = dx+dz$, $dv = dy+dz$, $d^2u = d^2v = d^2z$.

**Răspuns**.

$$dz = -\frac{\Phi_{,u}}{\Phi_{,u}+\Phi_{,v}}dx - \frac{\Phi_{,v}}{\Phi_{,u}+\Phi_{,v}}dy;$$

$$d^2z = -\frac{(\Phi_{,v})^2\Phi_{,uu} - 2\Phi_{,u}\Phi_{,v}\Phi_{,uv} + (\Phi_{,u})^2\Phi_{,vv}}{(\Phi_{,u}+\Phi_{,v})^3}(dx-dy)^2.$$

■

**Exerciţiul 1.2.15** *Funcţiile $F$ şi $G$, definite pe mulţimi deschise în $\mathbb{R}^2$, sunt astfel încât sistemul*

$$\begin{cases} F(x+y+z, xy+zu) - 1 &= 0,\\ G(x+y+z, xz+y^2+u^2) &= 0 \end{cases}$$

*defineşte implicit pe $z$ şi $u$ ca funcţii de $x$ şi $y$. Se cer:*

$$dz; \quad du; \quad \frac{\partial z}{\partial x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial y}.$$

**Indicaţie**. Se diferenţiază fiecare ecuaţie a sistemului şi se obţine sistemul

$$\begin{cases} (F_{,1}+uF_{,2})dz &+ \; zF_{,2}du &= -(F_{,1}+yF_{,2})dx - (F_{,1}+xF_{,2})dy,\\ (G_{,1}+xG_{,2})dz &+ \; 2uG_{,2}du &= -(G_{,1}+zG_{,2})dx - (G_{,1}+2yG_{,2})dy, \end{cases}$$

din care se determină $dz$ şi $du$. Derivatele parţiale cerute sunt coeficienţii lui $dx$ şi $dy$ din expresiile diferenţialelor $dz$ şi $du$. ■

# 1.3 Extreme ale funcţiilor definite implicit

## 1.3.1 Exemple şi exerciţii rezolvate

**Exerciţiul 1.3.1** Să *se determine extremele locale ale funcţiei reale $z = z(x,y)$ definită implicit de ecuaţia*

$$F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10 = 0$$

*şi să se dea o interpretare geometrică rezultatelor.*

**Soluţie.** Funcţia $F$ este infinit diferenţiabilă pe $I\!R^3$ iar derivata sa parţială în raport cu $z$, $F_{,z}(x,y,z) = 2z - 4$, este diferită de zero într–o vecinătate a oricărui punct $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ pentru care $F(\mathbf{x}_0) = 0$ şi $z_0 \neq 2$.

Dacă $\mathbf{x}_0 \in I\!R^3$ este un astfel de punct, atunci conform teoremei de existenţă şi unicitate a unei funcţii reale de două variabile reale definită implicit de ecuaţia $F(x,y,z) = 0$, într–o vecinătate $V_0 \in \mathcal{V}(\mathbf{x}_0)$ ecuaţia $F(x,y,z) = 0$ defineşte implicit funcţia reală $z = z(x,y)$, infinit diferenţiabilă pe discul închis

$$\overline{B}((x_0,y_0);h) = \{(x,y) \in I\!R^2 : \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \leq h\} \subset xOy.$$

Valorile funcţiei $z = z(x,y)$ sunt în intervalul $[z_0 - k, z_0 + k]$ iar mulţimea

$$\overline{B}((x_0,y_0);h) \times [z_0 - k, z_0 + k] \subset V_0$$

este o porţiune din cilindrul circular de rază $h$ şi înălţime $2k$, cu generatoarele paralele cu axa $Oz$, ale cărui baze sunt două discuri de rază $h$ situate în planele $z = z_0 - k$ şi $z = z_0 + k$. Ambele discuri sunt paralele cu planul $xOy$, centrele lor fiind în punctele $(x_0, y_0, z_0 - k)$ şi $(x_0, y_0, z_0 + k)$.

Funcţia $z = z(x,y)$ astfel definită are în plus proprietăţile:

$$z_0 = z(x_0,y_0); \quad F(x,y,z(x,y)) = 0, \quad (\forall)\ (x,y) \in \overline{B}((x_0,y_0);h).$$

Derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei $z = z(x,y)$, în punctele discului $\overline{B}((x_0,y_0);h)$, sunt date de:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,z(x,y))}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))}; \\[4ex] \dfrac{\partial z}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,z(x,y))}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))}. \end{cases} \tag{1.2}$$

Pentru a determina punctele de extrem ale funcţiei $z = z(x,y)$ trebuie să rezolvăm mai întâi sistemul format prin anularea derivatelor parţiale de ordinul 1 ale acesteia.

Dar, din (1.2) rezultă că anularea derivatelor parţiale de ordinul întâi ale funcţiei $z = z(x,y)$ implică anularea derivatelor de ordinul întâi ale funcţiei

$F$. În plus, trebuie avut în vedere că interesează doar acele puncte $(x, y, z)$ în care $F(x, y, z) = 0$. Rezultă că punctele staţionare ale funcţiei $z = z(x, y)$ sunt date de sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) &= 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) &= 0, \\ F(x, y, z) &= 0, \end{cases} \implies \begin{cases} 2x - 2 = 0, \\ 2y + 2 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0, \end{cases} \tag{1.3}$$

cu soluţiile $(1, -1, -2)$ şi $(1, -1, 6)$, pentru care $z \neq 2$. Fiecare din punctele $(1, -1, -2)$ şi $(1, -1, 6)$ poate fi interpretat ca punct de forma $(x_0, y_0, z_0)$ din raţionamentul descris la începutul exerciţiului.

Corespunzător primului punct, avem funcţia definită implicit $z = z_1(x, y)$, cu punctul staţionar $(1, -1)$ şi în care valoarea ei este $z_1(1, -1) = -2$.

Acelaşi punct staţionar îl are şi funcţia $z = z_2(x, y)$, definită implicit de ecuaţia $F(x, y, z) = 0$ în vecinătatea punctului $(1, -1, 6)$.

Pentru a decide natura punctului staţionar pentru fiecare din cele două funcţii trebuie să calculăm $d^2z_1(1, -1)$ şi $d^2z_2(1, -1)$.

Diferenţiind de două ori ecuaţia $F(x, y, z) = 0$, obţinem:

$$\begin{cases} (x - 1)dx + (y + 1)dy + (z - 2)dz &= 0; \\ dx^2 + dy^2 + dz^2 + (z - 2)d^2z &= 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Dacă în a doua din relaţiile (1.4) luăm drept $z$, pe rând, cele două funcţii definite implicit de ecuaţia $F(x, y, z) = 0$, găsim:

$$\begin{cases} dx^2 + dy^2 + \Big(dz_1(x, y)\Big)^2 + d^2z_1(x, y) &= 0; \\ dx^2 + dy^2 + \Big(dz_2(x, y)\Big)^2 + d^2z_2(x, y) &= 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Din aceste relaţii, considerând $x = 1$ şi $y = -1$, $z_1(1, -1) = -2$ şi $z_2(1, -1) = 6$, $dz_1(1, -1) = 0$ şi $dz_2(1, -1) = 0$, rezultă

$$d^2z_1(1, -1) = \frac{1}{4}(dx^2 + dy^2), \quad d^2z_2(1, -1) = -\frac{1}{4}(dx^2 + dy^2).$$

Aceste diferenţiale sunt forme pătratice pe $I\!R^2$, prima pozitiv definită, a doua negativ definită. Aşadar, funcţia $z = z_1(x, y)$ are în $(1, -1)$ un punct

de minim, iar pentru funcţia $z = z_2(x, y)$, acelaşi punct este un punct de maxim. Valoarea minimă a funcţiei $z = z_1(x, y)$ este $z_1(1, -1) = -2$ iar valoarea maximă a funcţiei $z = z_2(x, y)$ este $z_2(1, -1) = 6$.

Pentru a interpreta geometric rezultatele, să scriem ecuaţia $F(x, y, z) = 0$ în forma echivalentă

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 - 16 = 0 \tag{1.6}$$

ce, în $I\!R^3$, reprezintă sfera cu centrul în punctul $C(1, -1, 2)$ şi raza 4. Punctele sferei în care nu se poate aplica teorema de existenţă şi unicitate sunt cele de pe cercul mare al sferei aflat în planul $z = 2$. În oricare alt punct $\mathbf{x}_0$ al sferei nesituat pe acest cerc, ecuaţia $F(x, y, z) = 0$ defineşte implicit pe $z$ ca funcţie de $x$ şi $y$. Dacă acest punct este situat oriunde pe semisfera inferioară planului $z = 2$, din (1.6) rezultă că funcţia $z = z(x, y)$ are expresia

$$z(x, y) = 2 - \sqrt{16 - (x-1)^2 - (y+1)^2},$$

iar dacă punctul $\mathbf{x}_0$ se află pe cealaltă semisferă, funcţia $z = z(x, y)$ are expresia

$$z(x, y) = 2 + \sqrt{16 - (x-1)^2 - (y+1)^2}.$$

Cele două puncte determinate prin rezolvarea sistemului (1.3) sunt, primul pe emisfera inferioară ($z < 2$), iar cel de al doilea pe semisfera superioară.

Aşadar, funcţiile $z = z_1(x, y)$ şi $z = z_2(x, y)$ sunt

$$\begin{aligned} z_1(x, y) &= 2 - \sqrt{16 - (x-1)^2 - (y+1)^2}, \\ z_2(x, y) &= 2 + \sqrt{16 - (x-1)^2 - (y+1)^2}. \end{aligned}$$

Cum punctele $M_1(1, -1, -2)$ şi $M_2(1, -1, 6)$ au aceleaşi abscise şi aceleaşi ordonate cu centrul sferei, rezultă că $M_1$ este *polul sud* al sferei iar $M_2$ *polul nord*, ele fiind şi puncte sferei de cote extreme.

Punctele $M_1$ şi $M_2$ sunt puncte de extrem global ale respectiv funcţiilor $z_1$ şi $z_2$. ■

**Exerciţiul 1.3.2** Să *se determine extremele locale ale funcţiei reale* $z = z(x, y)$ *definită implicit de ecuaţia*

$$F(x, y, z) = x^3 - y^2 + z^2 - 3x + 4y + z - 8 = 0.$$

**Soluţie.** Funcţia $F$ satisface ipotezele teoremei de existenţă şi unicitate a unei funcţii definite implicit de ecuaţia $F(x,y,z)=0$, deoarece $F$ este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^3$, există puncte, de exemplu $M_1(1,2,2)$, în care $F(M_1)=0$ iar $F_{,z}(1,2,2)=(2z+1)|_{(1,2,2)}=5\neq 0$. Prin urmare, în vecinătatea punctului $M_1$, există funcţia $z=z(x,y)$ definită implicit de ecuaţia $F(x,y,z)=0$.

Pentru determinarea punctelor de extrem ale funcţiei definite implicit de ecuaţia $F(x,y,z)=0$ într–o vecinătate a unui punct din $\mathbb{R}^3$, calculăm

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)=3x^2-3,\quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)=-2y+4,$$

iar apoi rezolvăm sistemul

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) &= 0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) &= 0,\\ F(x,y,z) &= 0,\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}3x^2-3=0,\\ -2y+4=0,\\ x^3-y^2+z^2-3x+4y+z-8=0.\end{cases}$$

Acest sistem are soluţiile:

$$(1,2,-3);\quad (1,2,2);\quad (-1,2,-2);\quad (-1,2,1),$$

care pot fi interpretate ca puncte în $\mathbb{R}^3$. În toate aceste puncte, $F_{,z}(x,y,z)=2z+1$ este diferită de zero.

Pentru funcţiile $z=z_i(x,y)$, $i=1,2,3,4$, definite implicit de ecuaţia $F(x,y,z)=0$ în vecinătăţi ale punctelor:

$$M_1(1,2,2);\quad M_2(1,2,-3);\quad M_3(-1,2,-2);\quad M_4(-1,2,1)$$

există punctele staţionare

$$M_1'(1,2);\quad M_2'(1,2)\equiv M_1';\quad M_3'(-1,2);\quad M_4'(-1,2)\equiv M_3'.$$

Pentru a determina natura acestor puncte staţionare, calculăm diferenţiala de ordinul doi pentru fiecare din funcţiile $z=z_i(x,y)$

$$\begin{aligned}d^2z_i(x,y) &= -\frac{1}{F_{,z}(x,y,z_i(x,y))}\Big(F_{,xx}(x,y,z_i(x,y))dx^2+\\ &+ 2F_{,xy}(x,y,z_i(x,y))dxdy+F_{,yy}(x,y,z_i(x,y))dy^2\Big).\end{aligned}$$

Înlocuind derivatele parţiale secunde ale lui $F$, găsim:

$$d^2z_i(x,y) = -\frac{2}{2z_i(x,y)+1}(3xdx^2 - dy^2).$$

Corespunzător celor patru puncte şi totodată celor patru funcţii, avem:

$$\begin{cases} d^2z_1(1,2) & = & \dfrac{2}{5}(3dx^2 - dy^2); \\ d^2z_2(1,2) & = & -\dfrac{2}{5}(3dx^2 - dy^2); \\ d^2z_3(-1,2) & = & -\dfrac{2}{3}(3dx^2 + dy^2); \\ d^2z_4(-1,2) & = & \dfrac{2}{3}(3dx^2 + dy^2). \end{cases}$$

Primele două diferenţiale sunt forme pătratice nedefinite pe $I\!R^2$, a treia este formă pătratică negativ definită în timp cea de a patra este o formă pătratică pozitiv definită. În concluzie,

- punctul $M_1'(1,2)$ este punct de tip şa atât pentru funcţia $z = z_1(x,y)$ cât şi pentru funcţia $z = z_2(x,y)$;
- $M_3'(-1,2)$ este punct de maxim al funcţiei $z = z_3(x,y)$;
- $M_4'(-1,2)$ este punct de minim al funcţiei $z = z_4(x,y)$;
- valoarea maximă a funcţiei $z = z_3(x,y)$ este $-2$;
- valoarea minimă a funcţiei $z = z_4(x,y)$ este 1.

Nu putem să ne pronunţăm dacă punctele de extrem ale funcţiilor $z = z_3(x,y)$ şi $z = z_4(x,y)$ sunt globale. În mod cert însă ele sunt puncte de extrem local. ■

**Exerciţiul 1.3.3** Să *se determine extremele funcţiei* $z = z(x,y)$ *definită implicit de ecuaţia*

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 - x^2 - z^2.$$

**Soluţie.** Ecuaţia dată este echivalentă cu

$$F(x,y,z)=0, \tag{1.7}$$

unde

$$F(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^2-a^2+x^2+z^2.$$

Funcţia $F$ satisface ipotezele teoremei de existenţă şi unicitate a funcţiilor definite implicit de ecuaţia (1.7), deci există funcţia $z=z(x,y)$ care satisface identitatea

$$F(x,y,z(x,y))\equiv 0, \tag{1.8}$$

într–o vecinătate a unui punct $\mathbf{x}_0=(x_0,y_0,z_0)$, cu $z_0\neq 0$ şi $F(\mathbf{x}_0)=0$.

Funcţia definită implicit pe o vecinătate a punctului $(x_0,y_0)$ este infinit diferenţiabilă şi în orice punct al acestei vecinătăţi

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,z(x,y))}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))},\quad \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,z(x,y))}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))},$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))\neq 0.$$

Se pot indica cel puţin două puncte $\mathbf{x}_0$ care se încadrează în ipotezele teoremei de existenţă şi unicitate:

$$\mathbf{x}_0=\Big(0,0,-\sqrt{\frac{\sqrt{1+4a^2}-1}{2}}\Big);\quad \mathbf{x}_0=\Big(0,0,\sqrt{\frac{\sqrt{1+4a^2}-1}{2}}\Big), \tag{1.9}$$

în vecinătatea cărora există funcţiile $z=z_1(x,y)$ şi $z=z_2(x,y)$ definite implicit de ecuaţia $F(x,y,z)=0$.

Pentru a determina punctele de extrem ale funcţiei $z=z(x,y)$ trebuie sa determinăm mai întâi punctele sale critice, soluţii ale sitemului

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)=0,\\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)=0,\\[2mm] F(x,y,z)=0.\end{cases}$$

Acest sistem are două soluţii şi acestea sunt date în (1.9). Prin urmare, fiecare din funcţiile $z=z_i(x,y)$, $i=1,2$, au originea $(0,0)$ ca punct staţionar.

Pentru determinarea naturii punctelor staţionare ale celor două funcţii, calculăm $d^2z_i(0,0)$, $i=1,2$, fie după formula de calcul

$$\begin{aligned} d^2z_i(0,0) &= -\frac{1}{F_{,z}(0,0,z_i(0,0))}\Big(F_{,xx}(0,0,z_i(0,0))dx^2+ \\ &+ 2F_{,xy}(0,0,z_i(0,0))dxdy + F_{,yy}(0,0,z_i(0,0))dy^2\Big), \end{aligned}$$

fie diferenţiind de două ori în egalitatea (1.7) după care se ia $x=0, y=0$, $z=z_i(0,0)$, cu $i=1,2$. Găsim:

$$d^2z_i(0,0) = -\frac{1}{z_i(0,0)(1+2z_i^2(0,0))}\Big((1+2z_i^2(0,0))dx^2 + 2z_i^2(0,0)dy^2\Big).$$

Se observă că natura formei pătratice prin care se exprimă diferenţialele de ordin doi în origine ale respectiv funcţiilor $z=z_1(x,y)$ şi $z=z_2(x,y)$ depinde doar de semnul lui $z_i(0,0), i=1,2$.

Cum $z_1(0,0)<0$ şi $z_2(0,0)>0$, rezultă că $d^2z_1(0,0)$ şi $d^2z_2(0,0)$ sunt forme pătratice, prima pozitiv definită, iar a doua negativ definită.

În concluzie, $z=z_1(x,y)$, $z=z_2(x,y)$ au în origine un punct de minim, respectiv punct de maxim. ■

**Exerciţiul 1.3.4** *Să se determine extremele locale ale funcţiei $z=f(x,y)$ definită implicit de ecuaţia*

$$F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-xz-yz+2x+2y+2z-2=0.$$

**Soluţie.** Domeniul de definiţie al funcţiei reale $F$ de mai sus poate fi considerat că este întreg spaţiul $I\!R^3$, prin urmare $F\in\mathcal{F}(I\!R^3)$. Funcţia $F$ este infinit diferenţiabilă iar derivatele sale parţiale de ordinul întâi sunt:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = 2x-z+2;\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = 2y-z+2;\ \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = -x-y+2z+2.$$

Putem afirma că ecuaţia $F(x,y,z)=0$ defineşte implicit pe $z$ ca funcţiie reală $f$ de variabilele reale $x$ şi $y$ în vecinătatea oricărui punct $M_0(x_0,y_0,z_0)\in I\!E^3$ pentru care avem îndeplinite condiţiile: $F(x_0,y_0,z_0)=0$; $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0$. Nu este dificil de constatat că astfel de puncte $M_0$ există. Presupunând că

$M_0$ este un astfel de punct, atunci punctele critice ale lui $f$ se determină rezolvând sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)=0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)=0, \\ F(x,y,z)=0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x-y+2=0, \\ 2y-z+2=0, \\ x^2+y^2+z^2-xz-yz+2x+2y+2z-2=0. \end{cases}$$

Acest sistem are soluţiile

$$\begin{cases} x_1=-3+\sqrt{6}, \\ y_1=-3+\sqrt{6}, \\ z_1=-4+2\sqrt{6}, \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} x_2=-3-\sqrt{6}, \\ y_2=-3-\sqrt{6}, \\ z_2=-4-2\sqrt{6}. \end{cases}$$

Considerăm acum punctele $M_1(x_1,y_1,z_1)$ şi $M_2(x_2,y_2,z_2)$. Derivata parţială a lui $F$ în raport cu $z$ în aceste două puncte este diferită de zero.

În acest mod s–au obţinut două puncte staţionare ale funcţiei $f$ şi anume $M_1'(-3+\sqrt{6},-3+\sqrt{6})$ şi $M_1'(-3-\sqrt{6},-3-\sqrt{6})$, valorile corespunzătoare ale funcţiei $f$ fiind $f(M_1')=-4+2\sqrt{6}$ respectiv $f(M_2')=-4-2\sqrt{6}$. De asemeni, utilizând regulile de diferenţiere şi considerând variabila $z$ drept o constantă găsim:

$$d^2_{(x,y)}F(x,y,z)=2(dx^2+dy^2);\, d^2_{(x,y)}F(M_1)=2(dx^2+dy^2);\, d^2_{(x,y)}F(M_2)=2(dx^2+dy^2).$$

Dacă precizăm că:

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x_1,y_1,z_1)=2\sqrt{6};\quad \frac{\partial F}{\partial z}(x_2,y_2,z_2)=-2\sqrt{6},$$

atunci folosind formula de calcul a diferenţialei de ordinul al doilea a unei funcţii definite implicit de ecuaţia $F(x,y,z)=0$, obţinem

$$d^2 f(x_1,y_1)=-\frac{1}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_1,y_1,z_1)}\, d^2_{(x,y)}\, F(x_1,y_1,z_1)=-\frac{\sqrt{6}}{6}(dx^2+dy^2),$$

din care tragem concluzia că diferenţiala a doua a lui $f$ în punctul $M_1'$ este negativ definită şi ca atare punctul $M_1'$ este punct de maxim local pentru funcţia $f$ şi valoarea maximă a lui $f$ este $z_{\max}=f(x_1,y_1)=z_1=-4+\sqrt{6}$.

În mod similar găsim

$$d^2 f(x_2,y_2) = -\frac{1}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_2,y_2,z_2)}\, d^2_{(x,y)}\, F(x_2,y_2,z_2) = \frac{\sqrt{6}}{6}(dx^2+dy^2),$$

de unde deducem că diferenţiala a doua a lui $f$ în punctul $M_2'$ este pozitiv definită fapt care duce la afirmaţia că punctul $M_2'$ este punct de minim local iar valoarea minimă a lui $f$ este $z_{\min} = f(x_2,y_2) = z_2 = -4-\sqrt{6}$. ■

### 1.3.2 Probleme propuse

**Exerciţiul 1.3.5** *Să se determine extremele locale ale funcţiei $y = f(x)$, definită implicit de ecuaţia*

$$F(x,y) = y^3 + x^2 - xy - 3x - y + 4 = 0.$$

**Răspuns**. Punctul $M_0(5/8,-7/4)$ este singurul punct critic al funcţiei $y = f(x)$ definită implicit de ecuaţia $F(x,y) = 0$, într–o vecinătate a lui $M_0$. Derivata secundă a funcţiei $f$ într–un punct al acestei vecinătăţi este

$$f''(x) = \frac{(f'(x)-2)(3f^2(x)-x-1)+(2x-f(x)-3)(6f(x)f'(x)-1)}{(3f^2(x)-x-1)^2}.$$

Având în vedere că $f'(5/8) = 0$ şi că $f(5/8) = -7/4$, din expresia derivatei secunde a funcţiei $f$ deducem $f''(5/8) = -32/121 < 0$.

Rezultă că $x_0 = 5/8$ este punct de maxim pentru funcţia $y = f(x)$, valoarea sa maximă fiind $f_{\max} = -7/4$. ■

## 1.4 Extreme condiţionate. Metoda multiplicatorilor lui Lagrange

### 1.4.1 Exemple şi exerciţii rezolvate

**Exerciţiul 1.4.1** Să *se determine punctele de extrem condiţionat ale funcţiei scop $f(x,y) = x^2 + y^2$ ştiind că coordonatele sale sunt supuse legăturii*

$$F(x,y) = (x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2 - 9 = 0$$

*şi apoi să se dea o interpretare geometrică rezultatelor stabilite.*

**Soluţie.** Analiza enunţului arată că avem de rezolvat o problemă de extrem condiţionat a unei funcţii scop de două variabile $x$ şi $y$, supuse unei singure legături.

Pentru rezolvarea acestei probleme introducem funcţia lui Lagrange

$$\mathcal{L}(x,y;\lambda)=f(x,y)+\lambda F(x,y)$$

şi determinăm punctele staţionare ale acesteia. În acest scop, anulăm derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei $\mathcal{L}$. Se obţine în acest fel sistemul de trei ecuaţii

$$\begin{cases} 2x+2\lambda(x-\sqrt{2})=0,\\ 2y+2\lambda(y-\sqrt{2})=0,\\ (x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2-9=0, \end{cases}$$

care are soluţiile

$$\Big(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{1}{3}\Big);\quad \Big(\frac{5\sqrt{2}}{2},\frac{5\sqrt{2}}{2};-\frac{5}{3}\Big).$$

Prin urmare, funcţia $f$ are punctele staţionare condiţionate

$$M_1\Big(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\Big);\quad M_2\Big(\frac{5\sqrt{2}}{2},\frac{5\sqrt{2}}{2}\Big),$$

corespunzătoare valorilor $\lambda_1=-\dfrac{1}{3}$ şi $\lambda_2=-\dfrac{5}{3}$ ale multiplicatorului $\lambda$ a lui Lagrange.

Pentru a determina natura acestor puncte staţionare condiţionate ale funcţiei $f$ cercetăm natura punctelor critice corespunzătoare ale funcţiei lui Lagrange. În acest sens, calculăm diferenţiala a doua a funcţiei $\mathcal{L}$ în cele două puncte. Avem:

$$\begin{aligned} d^2\mathcal{L}(x_1,y_1;\lambda_1) &= 2(1+\lambda_1)(dx^2+dy^2)+2[2(x_1-\sqrt{2})dx+(y_1-\sqrt{2})dy]d\lambda;\\ d^2\mathcal{L}(x_2,y_2;\lambda_2) &= 2(1+\lambda_2)(dx^2+dy^2)+2[2(x_2-\sqrt{2})dx+(y_2-\sqrt{2})dy]d\lambda. \end{aligned}$$

Dar, din faptul că luăm în calcul numai puncte $M(x,y)$ ale căror coordonate verifică legătura $F(x,y)=0$, prin diferenţierea acesteia şi înlocuirea punctului $M(x,y)$ cu punctele $M_1(x_1,y_1)$ şi $M_2(x_2,y_2)$ obţinem

$$2(x_1-\sqrt{2})dx+2(y_1-\sqrt{2})dy=0,\quad 2(x_2-\sqrt{2})dx+2(y_2-\sqrt{2})dy=0,$$

din fiecare egalitate rezultând în plus $dy = -dx$.

Astfel, diferenţialele de ordinul al doilea a funcţiei lui Lagrange în punctele sale staţionare devin

$$d^2\mathcal{L}(x_1, y_1; \lambda_1) = \frac{8}{3}dx^2; \quad d^2\mathcal{L}(x_2, y_2; \lambda_2) = -\frac{8}{3}dx^2,$$

constatând totodată că prima dintre aceste diferenţiale este o formă pătratică pozitiv definită, iar cea de a doua este formă pătratică negativ definită.

Prin urmare, $M_1$ este punct de minim condiţionat al funcţiei $f$, iar $M_2$ este punct de maxim condiţionat. Valorile extreme ale funcţiei scop sunt $f_{\min} = f(M_1) = 1$ şi $f_{\max} = f(M_2) = 25$.

Pentru a interpreta geometric rezultatele găsite să observăm mai întâi că legătura reprezintă cercul de rază 3 cu centrul aflat pe prima bisectoare în punctul $C(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, apoi că funcţia scop este pătratul distanţei de la originea reperului $xOy$ la punctul $M(x, y)$.

Atunci, problema de extrem condiţionat poate fi reformulată astfel: *dintre toate punctele cercului să se determine punctul cel mai apropiat de origine şi punctul cel mai îndepărtat de origine.*

Cum originea este punct interior cercului, rezultă că cele două puncte sunt extremităţile diametrului prin origine al cercului, diametru care se află pe prima bisectoare a reperului $xOy$. Valorile extreme ale funcţiei scop arată că originea se află la o unitate de punctul $M_1$ şi la $\sqrt{25} = 5$ unităţi de lungime de punctul $M_2$. ■

**Exerciţiul 1.4.2** D*eterminaţi extremele condiţionate ale funcţiei scop* $u = xy^2z^3$ *cu legătura* $x + 2y + 3z = a$, *unde* $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, *iar* $a$ *este o constantă pozitivă dată.*

**Soluţie.** Observăm că funcţia scop $u$ are aceleaşi extreme ca şi funcţia $\ln u = v$. Atunci, putem transfera problema dată la determinarea extremelr condiţionate ale funcţiei scop

$$v = \ln x + 2\ln y + 3\ln z,$$

legătura fiind aceeaşi.

Introducem funcţia lui Lagrange a acestei probleme

$$\mathcal{L}(x, y, z; \lambda) = \ln x + 2\ln y + 3\ln z + \lambda(x + 2y + 3z - a)$$

şi rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \lambda = 0, \\ \dfrac{2}{y} + \lambda = 0, \\ \dfrac{3}{z} + \lambda = 0, \\ x + 2y + 3z - a = 0. \end{cases}$$

obţinut prin anularea celor patru derivate parţiale de ordinul întâi ale funcţiei $\mathcal{L}$. Acest sistem are soluţia

$$\mathbf{w}_0 = \Big(\frac{a}{6}, \frac{a}{6}, \frac{a}{6}; -\frac{6}{a}\Big),$$

care reprezintă punctul staţionar a funcţiei $\mathcal{L}$.

Rezultă că funcţia scop $v$ are punctul staţionar condiţionat $M_0\Big(\dfrac{a}{6}, \dfrac{a}{6}, \dfrac{a}{6}\Big)$ corespunzător multiplicatorului Lagrange $\lambda_0 = -\dfrac{6}{a}$.

Diferenţiala a doua a funcţiei lui Lagrange într–un punct oarecare al domeniului ei de definiţie este

$$d^2\mathcal{L}(x, y, z; \lambda) = -\frac{1}{x^2}dx^2 - \frac{1}{y^2}dy^2 - \frac{1}{z^2}dz^2 + 2d\lambda(dx + 2dy + 3dz).$$

Dar, din diferenţierea legăturii rezultă $dx + 2dy + 3dz = 0$, care scrisă în forma echivalentă $dx = -2dy - 3dz$ şi introdusă în expresia diferenţialei a doua în care $x = -2y - 3z$, conduce la

$$d^2\mathcal{L}(x, y, z; \lambda) = -\frac{1}{(2y + 3z)^2}(2dy + 3dz)^2 - \frac{1}{y^2}dy^2 - \frac{1}{z^2}dz^2$$

care, calculată în punctul staţionar dă

$$d^2\mathcal{L}(M_0; \lambda_0) = d^2\mathcal{L}(\mathbf{w}_0) = -\frac{36}{25a^2}(29dy^2 + 12dydz + 34dz^2).$$

Hessiana acestei diferenţiale,

$$H_{\mathcal{L}}(\mathbf{w}_0) = \begin{pmatrix} -\dfrac{29 \cdot 36}{25a^2} & -\dfrac{6 \cdot 36}{25a^2} \\ -\dfrac{6 \cdot 36}{25a^2} & -\dfrac{34 \cdot 36}{25a^2} \end{pmatrix},$$

are minorii principali $\Delta_1 = -\dfrac{29 \cdot 36}{25a^2} < 0$ şi $\Delta_2 = \det H_{\mathcal{L}}(\mathbf{w}_0) > 0$ şi deci, conform criteriului lui Sylvester, $d^2\mathcal{L}(\mathbf{w}_0)$ este o formă pătratică negativ definită.

Rezultatele stabilite demonstrează că $M_0$ este un punct de maxim condiţionat pentru funcţia $v$, prin urmare şi pentru funcţia $u$. Pentru că

$$u(x,y,z) = xy^2z^3 \leq u_{\max} = u(M_0) = \Big(\frac{a}{6}\Big)^6$$

rezultă că $M_0$ este un punct de maxim condiţionat global pentru funcţia $u$.■

**Exerciţiul 1.4.3** N*umerele pozitive* $x, y, z$ *satisfac condiţia* $x + y + z = \dfrac{\pi}{2}$. *Care sunt atunci valorile extreme ale funcţiei* $u = \sin x \sin y \sin z$?

**Soluţie.** La fel ca în exerciţiul precedent, vom determina extremele condiţionate ale funcţiei scop

$$v = \ln u = \ln \sin x + \ln \sin y + \ln \sin z,$$

cu legătura între variabilele sale dată de

$$F(x,y,z) = x + y + z - \frac{\pi}{2} = 0.$$

Punctele astfel determinate vor fi identice cu punctele de extrem condiţionat ale funcţiei $u = u(x,y,z)$ cu legătura $F(x,y,z) = 0$.

Funcţia lui Lagrange corespunzătoare funcţiei scop $v$ şi legăturii $F(x,y,z) = 0$ are punctul staţionar

$$\mathbf{w}_0 = \Big(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}; -\sqrt{3}\Big)$$

Dacă ţinem cont de faptul că prin diferenţierea legăturii rezultă $dz = -dx - dy$, diferenţiala a doua a funcţiei lui Lagrange în punctul staţionar $\mathbf{w}_0$ are expresia

$$d^2\mathcal{L}(\mathbf{w}_0) = -8(dx^2 + dxdy + dz^2).$$

Pentru că această diferenţială este o formă pătratică negativ definită, rezultă că în $M_0\Big(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\Big)$, punct staţionar condiţionat al funcţiei $v$ corespunzător multiplicatorului lui Lagrange $\lambda_0 = -\sqrt{3}$, avem un punct de maxim condiţionat al funcţiei $v$ şi la fel va avea şi funcţia dată $u$, valoarea maximă a celei din urmă fiind

$$u\Big(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\Big) = \frac{1}{8}.$$

Mai mult, putem afirma că în ipotezele:

$$x + y + z = \frac{\pi}{2}; \quad x > 0; \quad y > 0; \quad z > 0,$$

au loc inegalităţile

$$0 < \sin x \cdot \sin y \cdot \sin z \leq \frac{1}{8},$$

egalitatea realizându–se dacă şi numai dacă $x = y = z = \dfrac{\pi}{6}$. ■

**Exerciţiul 1.4.4** U*tilizând un raţionament geometric, să se determine formula de calcul a distanţei euclidiene de la punctul* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *la planul* $(P)$ *de ecuaţie carteziană*

$$(P): \quad Ax + By + Cz + D = 0,$$

*unde* $A, B, C, D \in I\!R$ *şi* $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

*Să se deducă apoi aceeaşi formulă folosind metoda multiplicatorilor lui Lagrange.*

**Soluţie.** Fie $M(x, y, z)$ un punct oarecare al planului $(P)$. Coordonatele sale trebuie să verifice ecuaţia planului, deci

$$F(x, y, z) = Ax + By + Cz + D = 0.$$

Distanţa euclidiană între punctele $M \in (P)$ şi $M_0$ este

$$d(M_0, M) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Distanţa $d(M_0, (P))$, de la punctul $M_0$ la planul $(P)$, este cea mai mică valoare a distanţelor $d(M_0, M)$ când $M$ descrie planul $(P)$

$$d(M_0, (P)) = \min\{d(M_0, M) |\ M \in (P)\}.$$

Este evident că acest minim al distanţelor euclidiene $d(M_0, M)$ se realizează când punctul $M$ este proiecţia ortogonală $M_0'$ a punctului $M_0$ pe planul $(P)$, prin urmare

$$d(M_0, (P)) = d(M_0', M_0).$$

Punctul $M_0'$ este intersecţia dintre planul $(P)$ şi normala $(N)$ la planul $(P)$ care trece prin $M_0$. Vectorul director al normalei $(N)$ la planul $(P)$ este

coliniar cu vectorul normalei planului $\mathbf{N} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$. Un punct oarecare al spaţiului $M(x, y, z)$ aparţine dreptei $(N)$ dacă şi numai dacă vectorul

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}$$

este coliniar cu vectorul $\mathbf{N}$. Aceşti vectori sunt coliniari dacă şi numai dacă coordonatele lor sunt proporţionale. Rezultă atunci că ecuaţiile canonice ale normalei $(N)$ sunt

$$(N): \quad \frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}.$$

Dacă egalăm rapoartele cu $t \in I\!R$, deducem ecuaţiile parametrice ale normalei

$$(N): \begin{cases} x &= x_0 + At, \\ y &= y_0 + Bt, \\ z &= z_0 + Ct. \end{cases}$$

Coordonatele punctului $M_0'$ sunt egale cu componentele corespunzătoare ale soluţiei sistemului format de ecuaţiile parametrice ale dreptei $(N)$ şi ecuaţia planului $(P)$

$$\begin{cases} x = x_0 + At, \\ y = y_0 + Bt, \\ z = z_0 + Ct, \\ Ax + By + Cz + D \;=\; 0. \end{cases}$$

Introducând valorile lui $x, y, z$ din primele trei ecuaţii ale sistemului în cea de a patra deducem că

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Revenind cu această valoare a lui $t$ în primele trei ecuaţii ale sistemului rezultă coordonatele $x_0', y_0', z_0'$ ale punctului $M_0'$

$$\begin{cases} x_0' = x_0 - \dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}A \\ y_0' = y_0 - \dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}B \\ z_0' = z_0 - \dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}C. \end{cases}$$

Acum putem determina $d(M_0', M_0)$ căci aceasta este distanţa $d(M_0, (P))$ de la punctul $M_0$ la planul $(P)$. Avem

$$d(M_0', M_0) = \sqrt{(x_0' - x_0)^2 + (y_0' - y_0)^2 + (z_0' - z_0)^2}.$$

Dacă se efectuează calculele, se găseşte că distanţa de la punctul $M_0$ la planul $(P)$ este dată de formula

$$d(M_0, (P)) = \pm \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Semnul plus corespunde cazului în care vectorul $\overrightarrow{M_0' M_0}$ are acelaşi sens cu vectorul normalei $\mathbf{N}$ a planului $(P)$, ceea ce este totuna cu a spune că acest semn se ia atunci când $F(M_0) > 0$.

Ne propunem să determinăm acest rezultat folosind însă metoda multiplicatorilor lui Lagrange.

Dacă vom considera că funcţia scop $u = f(x, y, z)$ este pătratul distanţei de la punctul $M_0$ la un punct $M \in (P)$

$$f(x, y, z) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2,$$

atunci avem o problemă tipică de extrem condiţionat în care legătura este

$$F(x, y, z) = Ax + By + Cy + D = 0.$$

Funcţia lui Lagrange este

$$\mathcal{L}(x, y, z; \lambda) = f(x, y, z) + \lambda F(x, y, z),$$

iar dacă avem în vedere expresiile funcţiilor $f$ şi $F$

$$\mathcal{L}(x, y, z; \lambda) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 + \lambda(Ax + By + Cy + D).$$

Sistemul care dă punctele staţionare ale funcţiei lui Lagrange este

$$\begin{cases} 2(x - x_0) + A\lambda & = 0, \\ 2(y - y_0) + B\lambda & = 0, \\ 2(z - z_0) + C\lambda & = 0, \\ Ax + By + Cz + D & = 0. \end{cases}$$

Înmulţim prima ecuaţie cu $A$, a doua cu $B$, a treia cu $C$, adunăm rezultatele şi ţinem cont de ultima ecuaţie a sistemului. Obţinem

$$\lambda_0 = 2\,\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Înlocuind această valoare a lui $\lambda$ în primele trei ecuaţii ale sistemului, deducem coordonatele punctului staţionar condiţionat al funcţiei $f$. Analizându–le, constatăm că sunt coordonatele lui $M_0'$.

Diferenţiala a doua a funcţiei $\mathcal{L}$ în punctul ei critic $(x_0', y_0', z_0; \lambda_0)$ are expresia

$$d^2\mathcal{L}(x_0', y_0', z_0; \lambda_0) = 2(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2d\lambda(Adx + Bdy + Cdz).$$

Dacă se ţine cont că $M(x, y, z)$ verifică legătura, prin diferenţierea acesteia găsim

$$Adx + Bdy + Cdz = 0,$$

astfel că diferenţiala a doua a funcţiei lui Lagrange în punctul staţionar $(x_0', y_0', z_0; \lambda_0)$ devine

$$d^2\mathcal{L}(x_0', y_0', z_0; \lambda_0) = 2(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

În această ultimă expresie a diferenţialei a doua a funcţiei $\mathcal{L}$ în punctul ei staţionar ar trebui să înlocuim pe $dz$, în ipoteza că $C \neq 0$, cu expresia care rezultă din diferenţiala legaturii, însă se vede că şi fără această operaţie $d^2\mathcal{L}(x_0', y_0', z_0; \lambda_0)$ este o formă pătratică pozitiv definită, ceea ce arată că punctul staţionar condiţionat $M_0(x_0', y_0', z_0)$ este punct de minim condiţionat pentru funcţia $f$ şi

$$f_{\min} = f(x_0', y_0', z_0) = \frac{(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)^2}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

De aici, prin extragerea radicalului, se obţine formula distanţei de la punctul $M_0$ la planul $(P)$, aceeaşi cu cea care a fost dedusă mai sus pe cale geometrică. ∎

**Exerciţiul 1.4.5** Să *se determine valorile extreme ale funcţiei*

$$f(x, y, z) = x + 2y - 2z$$

*ştiind că variabilele sale sunt supuse restricţiei*

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 16 = 0.$$

*Să se dea o interpretare geometrică rezultatului.*

**Soluţie.** Analizând enunţul constatăm că avem de a face cu o problemă de extrem condiţionat în care funcţia scop este $f$ iar legătura este $F(x,y,z)=0$.

Pentru a determina extremele condiţionate al funcţiei scop $f$ cu legătura

$$F(x,y,z)=0,$$

introducem funcţia lui Lagrange

$$\mathcal{L}(x,y,z;\lambda)=f(x,y,z)+\lambda\, F(x,y,z).$$

Rezultă că această funcţie este

$$\mathcal{L}(x,y,z;\lambda)=x+2y-2z+\lambda(x^2+y^2+z^2-16).$$

Punctele staţionare condiţionate se desprind din punctele critice ale funcţiei lui Lagrange, iar acestea din urmă se determină rezolvând sistemul

$$\begin{cases} 1+2\lambda x=0\\ 2+2\lambda y=0\\ -2+2\lambda z=0\\ x^2+y^2+z^2=16, \end{cases}$$

obţinut prin anularea derivatelor parţiale de ordinul întâi ale funcţiei lui Lagrange. Soluţiile acestui sistem sunt:

$$\Big(-\frac{4}{3},-\frac{8}{3},\frac{8}{3};\frac{3}{8}\Big);\qquad \Big(\frac{4}{3},\frac{8}{3},-\frac{8}{3};-\frac{3}{8}\Big).$$

Având în vedere legătura între punctele staţionare condiţionate ale funcţiei $f$ şi punctele critice ale funcţiei lui Lagrange, rezultă că $f$ are două puncte staţionare:

$$M_1\Big(-\frac{4}{3},-\frac{8}{3},\frac{8}{3}\Big);\qquad M_2\Big(\frac{4}{3},\frac{8}{3},-\frac{8}{3}\Big).$$

care corespund valorilor $\lambda_1=\dfrac{3}{8}$ şi respectiv $\lambda_2=-\dfrac{3}{8}$ ale multiplicatorului lui Lagrange $\lambda$.

Pentru a stabili dacă aceste două puncte staţionare condiţionate sunt sau nu sunt puncte de extrem condiţionat pentru funcţia scop, calculăm diferenţiala de ordinul al doilea a funcţiei lui Lagrange, întâi într–un punct arbitrar

$(x, y, z; \lambda)$ al domeniului ei de definiţie şi apoi în cele două puncte critice determinate. Constatăm că

$$d^2\mathcal{L}(x, y, z; \lambda) = 2\lambda(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2(2xdx + 2ydy + 2zdz)d\lambda.$$

Însă, din faptul că un punct oarecare $M(x, y, z)$ trebuie să satisfacă legătura, prin diferenţierea acesteia obţinem $2xdx + 2ydy + 2zdz = 0$ astfel că expresia diferenţialei a doua a funcţiei lui Lagrange devine

$$d^2\mathcal{L}(x, y, z; \lambda) = 2\lambda(dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

cu menţiunea că între diferenţialele $dx$, $dy$ şi $dz$ există legătura obţinută prin diferenţierea egalităţii $F(x, y, z) = 0$.

Expresiile diferenţialelor de ordinul al doilea ale funcţiei $\mathcal{L}$ în cele două puncte critice ale sale sunt:

$$\begin{aligned} d^2\mathcal{L}(M_1; \lambda_1) &= 2 \cdot \frac{3}{8}(dx^2 + dy^2 + dz^2); \\ d^2\mathcal{L}(M_2; \lambda_2) &= -2 \cdot \frac{3}{8}(dx^2 + dy^2 + dz^2), \end{aligned}$$

între $dx$, $dy$ şi $dz$ existând relaţia

$$dx = 2(dz - dy).$$

Introducând $dx$ în expresiile celor două diferenţiale, obţinem:

$$\begin{aligned} d^2\mathcal{L}(M_1; \lambda_1) &= \frac{3}{20}[(5dy - 4dz)^2 + 9dz^2]; \\ d^2\mathcal{L}(M_2; \lambda_2) &= -\frac{3}{20}[(5dy - 4dz)^2 + 9dz^2]. \end{aligned}$$

Examinându–le, constatăm că prima dintre aceste diferenţiale este o formă pătratică pozitiv definită în timp ce a doua este formă pătratică negativ definită. Aceste rezultate arată că $M_1$ este punct de minim condiţionat al funcţiei scop $f$, iar $M_2$ este punct de maxim condiţionat pentru $f$. Evident:

$$f_{\min} = f(M_1) = -12; \; f_{\max} = f(M_2) = 12.$$

Pentru a da o interpretare geometrică rezultatelor găsite să remarcăm întâi că toate punctele $M(x, y, z)$ care satisfac legătura se află pe sfera $(S)$ cu centrul în origine şi raza 4, sferă care are ecuaţia $(S): \; X^2 + Y^2 + Z^2 - 16 = 0$.

Funcţia de optimizat este, până la un factor multiplicativ, distanţa de la punctul $M(x,y,z)$ de pe sferă la planul $(P):\ X+2Y-2Z=0$, care trece prin origine şi are vectorul normalei $\mathbf{N}$ de parametri directori $\mathbf{N}=(1,2,-2)$.

Deoarece distanţa de la punctul $M(x,y,z)$ la planul $(P)$ este

$$d(M,(P)) = \frac{x+2y-2z}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = \frac{x+2y-2z}{3}$$

rezultă că $f(x,y,z) = 3d(M,(P))$. De aici rezultă că funcţia scop $f$ este maximă sau minimă când distanţa de la un punct al sferei $(S)$ la planul $(P)$ este maximă, respectiv minimă.

Dintre toate punctele sferei $(S)$, există două care au distanţe extreme la planul $(P)$. Aceste puncte se găsesc evident la intersecţia dintre dreapta $(N)$, normala la plan în origine, şi sfera $(S)$.

Pentru a determina punctele de intersecţie trebuie să rezolvăm sistemul format de ecuaţia sferei $(S)$ şi ecuaţiile normalei $(N)$.

Ecuaţiile canonice ale normalei sunt

$$(N):\ \frac{X}{1} = \frac{Y}{2} = \frac{Z}{-2}.$$

Aşadar, trebuie să rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} X^2+Y^2+Z^2-16=0 \\ Y=2X \\ Z=-2X. \end{cases}$$

Acest sistem are soluţiile $M_1$, $M_2$ şi $d(M_1,(P)) = -4$, $d(M_2,(P)) = 4$. Urmează că $f_{\min} = 3d(M_1,(P))$ iar $f_{\max} = 3d(M_2,(P))$, aceasta fiind interpretarea geometrică a rezultateleor stabilite. ■

**Exerciţiul 1.4.6** Să *se determine valorile extreme ale funcţiei*

$$f(x,y,z) = x-2y+2z$$

*ştiind că variabilele sale sunt supuse restricţiei*

$$F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-9=0.$$

*Să se dea o interpretare geometrică rezultatelor stabilite.*

**Soluţie.** Această problemă de extrem condiţionat cu o singură legătură a unei funcţii scop de trei variabile este foarte asemănătoare cu cea din exerciţiul precedent.

Dacă se fac calculele, se găsesc două puncte de extrem condiţionat. Coordonatele acestor puncte sunt $M_1(-1, 2, -2)$ şi $M_2(1, -2, 2)$, primul fiind punct de minim iar cel de al doilea, punct de maxim. Valorile extreme ale funcţiei scop vor fi $f_{\min} = f(M_1) = -9$ şi $f_{\max} = f(M_2) = 9$.

Interpretarea geometrică a rezultatelor găsite este asemănătoare celei date la exerciţiul precedent.

Funcţia scop $f(x, y, z)$ reprezintă de trei ori distanţa de la punctul $M(x, y, z)$, situat pe sfera cu centrul în origine de rază 3, la planul $(P): \ X-2Y+2Z = 0$, plan care trece prin centrul sferei. Atunci, este evident faptul că punctele aflate la distanţă extremă de plan sunt extremităţile diametrului sferei care are direcţia normalei $\mathbf{N} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ a planului $(P)$. ■

**Exerciţiul 1.4.7** *Să se determine extremele locale ale funcţiei scop $f(x, y, z) = z$ condiţionate de legăturile*

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) & = & x + y + z = 0, \\ F_2(x, y, z) & = & x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

*Să se dea o interpretare geometrică rezultatelor găsite.*

**Soluţie.** Funcţia lui Lagrange este

$$\mathcal{L}(x, y, z; \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda\, F_1(x, y, z) + \mu\, F_2(x, y, z).$$

Înlocuind expresiile funcţiei scop şi ale legăturilor, obţinem

$$\mathcal{L}(x, y, ; \lambda, \mu) = z + \lambda(x + y + z) + \mu(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

Să determinăm acum derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei lui Lagrange. Avem

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, y, z; \lambda, \mu) = \lambda + 2\mu x, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x, y, z; \lambda, \mu) = \lambda + 2\mu y,$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}(x, y, z; \lambda, \mu) = 1 + \lambda + 2\mu z, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x, y, z; \lambda, \mu) = F_1(x, y, z) = x + y + z,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu}(x, y, z; \lambda, \mu) = F_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

Să rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu x & = & 0 \\ \lambda + 2\mu y & = & 0 \\ 1 + \lambda + 2\mu z & = & 0 \\ x + y + z & = & 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 & = & 1, \end{cases}$$

obţinut prin anularea derivatelor parţiale de ordinul întâi ale funcţiei lui Lagrange.

Soluţiile acestui sistem sunt:

$$\Big(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -2\frac{\sqrt{6}}{6}; -\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\Big); \qquad \Big(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, 2\frac{\sqrt{6}}{6}; -\frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\Big).$$

Aceste rezultate arată că funcţia scop are două puncte staţionare condiţionate:

$$M_1\Big(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -2\frac{\sqrt{6}}{6}\Big); \qquad M_2\Big(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, 2\frac{\sqrt{6}}{6}\Big),$$

corespunzătoare respectiv valorilor $\lambda_1 = -\frac{1}{3}$, $\mu_1 = \frac{\sqrt{6}}{6}$ şi $\lambda_2 = -\frac{1}{3}$, $\mu_2 = -\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Diferenţiala a doua a funcţiei Lagrange este

$$\begin{aligned} d^2\mathcal{L}(x, y, z; \lambda, \mu) &= 2\mu(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2(dx + dy + dz)d\lambda + \\ &+ 2(xdx + ydy + zdz)d\mu. \end{aligned}$$

Dacă avem în vedere faptul că într–un punct oarecare al mulţimii soluţiilor sistemului format de legături au loc relaţile:

$$dx + dy + dz = 0; \quad 2xdx + 2ydy + 2zdz = 0,$$

obţinute prin diferenţierea legăturilor, rezultă că expresia diferenţialei a doua a funcţiei lui Lagrange devine

$$d^2\mathcal{L}(x, y, z; \lambda, \mu) = 4\mu(dx^2 + dxdy + dy^2).$$

Pentru cazul când considerăm primul punct staţionar condiţionat diferenţiala a doua a funcţiei lui Lagrange

$$d^2\mathcal{L}(x_1, y_1, z_1; \lambda_1, \mu_1) = 2\frac{\sqrt{6}}{3}(dx^2 + dxdy + dy^2)$$

este o formă pătratică pozitiv definită, cea de a doua diferenţială

$$d^2\mathcal{L}(x_2, y_2, z_2; \lambda_2, \mu_2) = -2\frac{\sqrt{6}}{3}(dx^2 + dxdy + dy^2)$$

fiind o formă pătratică negativ definită.

În concluzie, $M_1$ este punct de minim condiţionat în timp ce $M_2$ este un punct de maxim condiţionat al funcţiei scop $f(x, y, z) = z$.

Rezultatele pot fi interpretate geometric.

Sistemul format de legături reprezintă mulţimea punctelor aflate la intersecţia sferei cu centrul în origine şi raza 1, cu planul care trece prin centrul sferei şi are normala de paramatri directori $(1, 1, 1)$. Evident, planul specificat taie sfera după un cerc mare al ei. Atunci, funcţia scop reprezintă cota unui punct aflat pe cerc. Este clar acum că dintre toate punctele cercului există unul de cea mai mică cotă, acesta fiind $M_1$ şi un altul, $M_2$, cu cea mai mare cotă. ■

**Exemplul 1.4.1** D*intr–un fier cornier de lungime* 20 *de unităţi şi o foaie de sticlă cu aria egală cu* 16 *unităţi, urmează să se construiască un acvariu. Cum trebuiesc croite materialele astfel încât capacitatea acvariului să fie maximă?*

**Soluţie.** Acvariul ce urmează a fi proiectat are forma unui paralelipiped dreptunghic cu lungimea $x$, lăţimea $y$ şi înălţimea $z$, capacitatea sa fiind atunci egală cu $xyz$.

Putem presupune că $x \geq y \geq z > 0$.

Laturile paralelipipedului provin din fierul cornier, deci însumarea lungimilor acestora trebuie să dea lungimea materialului. Cum din cele 12 muchii ale unui paralelipiped din fiecare dimensiune sunt câte patru, urmează că $x + y + z = 5$.

Oricare din cele şase feţe ale paralelipipedului este un dreptunghi de arie fie $xy$, fie $yz$, fie $zx$. Deoarece sunt câte două dreptunghiuri cu aceleaşi dimensiuni şi pentru că provin din foaia de sticlă ce trebuie în întregime consumată, suma ariilor acestor feţe trebuie să fie 16. Prin urmare, $xy + yz + zx = 8$.

Constatăm că pentru a rezolva problema dată trebuie să soluţionăm o problemă de extrem condiţionat în care funcţia scop, definită pe mulţimea deschisă $D = \{M(x, y, z) | \, x \geq y \geq z > 0\}$, este $f(x, y, z) = xyz$, iar legăturile sunt:

$$F_1(x, y, z) = x + y + z - 5 = 0, \quad F_2(x, y, z) = xy + yz + zx - 8 = 0.$$

Fie $\mathcal{L}(x, y, z; \lambda, \mu)$ funcţia lui Lagrange corespunzătoare

$$\mathcal{L}(x, y, z; \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda F_1(x, y, z) + \mu F_2(x, y, z).$$

Derivatele parţiale de ordinul întâi ale ei sunt:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, y, z; \lambda, \mu) & = & yz + \lambda + \mu(y + z), \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x, y, z; \lambda, \mu) & = & zx + \lambda + \mu(z + x), \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}(x, y, z; \lambda, \mu) & = & xy + \lambda + \mu(x + y), \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x, y, z; \lambda, \mu) & = & F_1(x, y, z), \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu}(x, y, z; \lambda, \mu) & = & F_2(x, y, z). \end{cases}$$

Sistemul de cinci ecuaţii cu cinci necunoscute format prin anularea acestor derivate parţiale este

$$\begin{cases} yz + \lambda + \mu(y + z) & = & 0, \\ zx + \lambda + \mu(z + x) & = & 0, \\ xy + \lambda + \mu(x + y) & = & 0, \\ x + y + z - 5 & = & 0, \\ xy + yz + zx - 8 & = & 0. \end{cases} \tag{1.10}$$

Pentru a rezolva mai simplu acest sistem, observăm că primele trei ecuaţii ale sale pot fi interpretate ca un sistem liniar şi omogen în necunoscutele 1, $\lambda$ şi $\mu$. Fiindcă o soluţie a acestui sistem este nebanală (prima sa componentă este egală cu 1), urmează că rangul matricii sistemului trebuie să fie mai mic decât 3 şi deci

$$\begin{vmatrix} yz & 1 & y+z \\ zx & 1 & z+x \\ xy & 1 & x+y \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad (z-y)(3x^2-10x+8)=0.$$

Egalarea cu zero a fiecărui factor din ecuaţia rezultată, la care se adaugă ultimele două ecuaţii ale sistemului (1.10), conduce la două sisteme de trei ecuaţii cu necunoscutele $x, y$ şi $z$

$$\begin{cases} z-y=0, \\ x+y+z-5=0, \\ xy+yz+zx-8=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x^2-10x+8=0, \\ x+y+z-5=0, \\ xy+yz+zx-8=0. \end{cases}$$

Soluţiile acestor sisteme sunt:

$$(1,2,2); \quad \Big(\frac{7}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\Big); \quad (2,2,1); \quad (2,1,2); \quad \Big(\frac{4}{3},\frac{7}{3},\frac{4}{3}\Big); \quad \Big(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3}\Big),$$

dar numai două se încadrează în datele problemei şi anume:

$$\Big(\frac{7}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\Big); \quad (2,2,1).$$

Pentru a determina valorile parametrilor lui Lagrange $\lambda$ şi $\mu$ corespunzătoare acestor soluţii, vom înlocui pe rând componentele acestora în primele trei ecuaţii ale sistemului (1.10) şi astfel găsim pentru perechea $(\lambda, \mu)$ respectiv valorile:

$$\Big(\frac{16}{9}, -\frac{4}{3}\Big); \quad (4,-2).$$

Prin urmare, funcţia lui Lagrange are două puncte staţionare:

$$\Big(\frac{7}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3};\frac{16}{9},-\frac{4}{3}\Big); \quad (2,2,1;4,-2)$$

şi deci, funcţia scop are două puncte staţionare condiţionate:

$$M_1\Big(\frac{7}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\Big); \quad M_2(2,2,1),$$

corespunzătoare respectiv celor două perechi de valori ale lui $\lambda$ şi $\mu$.

Diferenţierea legăturilor într–un punct arbitrar al mulţimii $D$, conduce la

$$dx+dy+dz=0, \quad (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz=0,$$

care în cele două puncte staţionare condiţionate, devin

$$\begin{cases} dx+dy+dz &= 0,\\ 8dx+11(dy+dz) &= 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} dx+dy+dz &= 0,\\ 3(dx+dy)+4dz &= 0. \end{cases}$$

Din primul sistem obţinem $dx=0$ şi $dz=-dy$, iar din al doilea $dy=-dx$ şi $dz=0$.

Diferenţiala de ordinul al doilea a funcţiei lui Lagrange, într–un punct arbitrar al mulţimii $D$, are expresia

$$d^2\mathcal{L}(x,y,z;\lambda,\mu)=2[(z+\mu)dxdy+(x+\mu)dydz+(y+\mu)dzdx]+$$
$$+2(dx+dy+dz)d\lambda+2[(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz]d\mu.$$

care, în cele două puncte staţionare ale funcţiei $\mathcal{L}$, devine:

$$d^2\mathcal{L}\Big(M_1;\frac{16}{9},-\frac{4}{3}\Big)=-2dy^2;\quad d^2\mathcal{L}(M_2;4,-2)=2dx^2.$$

Prima diferenţială este o formă pătratică negativ definită şi deci $M_1$ este punct de maxim condiţionat, iar cea de a doua este o formă pătratică pozitiv definită, fapt ce atrage că punctul $M_2$ este punct de minim condiţionat. Valorile extreme corespunzătoare ale funcţiei scop sunt: $f_{max}=f(M_1)=\dfrac{112}{27}$; $f_{\min}=f(M_2)=4$.

În concluzie, problema dată revine la dimensionarea fierului cornier în patru bucăţi a câte 5 unităţi lungime, fiecare din ele urmând a fi divizată în câte trei bucăţi cu lungimile:

$$\frac{7}{3};\quad \frac{4}{3};\quad \frac{4}{3}.$$

Cât priveşte foaia de sticlă, aceasta urmează a fi croită în două părţi cu arii egale, fiecare parte la rându–i urmând a fi divizată în trei bucăţi având ariile:

$$\frac{28}{9};\quad \frac{28}{9};\quad \frac{16}{9}.$$

Pentru aceasta, se comandă foaia de sticlă cu lungimea de 6 unităţi şi lăţimea de $\dfrac{8}{3}$ unităţi. Foaia astfel comandată se divizează apoi în două părţi identice cu dimensiunile 6 şi $\dfrac{4}{3}$. Din fiecare parte se extrage un pătrat cu latura $\dfrac{4}{3}$,

iar din cele două bucăţi rămase se croiesc câte două dreptunghiuri identice de dimensiuni $\dfrac{7}{3}$ şi $\dfrac{4}{3}$. ■

**Exemplul 1.4.2** Să *se dimensioneze o cutie paralelipipedică de volum dat* $a^3$, *astfel ca aria acesteia, fără capac, să fie minimă.*

**Soluţie.** Fie $x$, $y$ dimensiunile feţei inferioare a cutiei şi $z$ înălţimea acesteia.

Dimensionarea cutiei, cu capacitatea prestabilită egală cu $a^3$, astfel încât aria acesteia, fără capac, să fie minimă, se realizează rezolvând o problemă de extrem cu legături, în care funcţia scop este

$$S : D \to I\!R+^*, \quad S(x,y,z) = xy + 2(yz + zx),$$

unde $D = \{(x,y,z) \in I\!R^3 |\ x > 0, y > 0, z > 0\}$, iar legătura este

$$F(x,y,z) = xyz - a^3 = 0.$$

Ca şi până acum, introducem funcţia lui Lagrange

$$\mathcal{L}(x,y,z;\lambda) = xy + 2(yz + zx) + \lambda(xyz - a^3),$$

derivatele sale parţiale de ordinul întâi fiind

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y,z;\lambda) & = & y + 2z + \lambda yz, \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y,z;\lambda) & = & x + 2z + \lambda zx, \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}(x,y,z;\lambda) & = & 2(x + y) + \lambda xy, \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x,y,z;\lambda) & = & xyz - a^3. \end{cases}$$

Egalând cu zero aceste derivate şi împărţind respectiv cu $yz$, $zx$, $xy$ primele trei ecuaţii ale sistemului, se obţine sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{1}{z} + \dfrac{2}{y} + \lambda = 0, \\ \dfrac{1}{z} + \dfrac{2}{x} + \lambda = 0, \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{y} + \lambda = 0, \\ xyz - a^3 = 0, \end{cases}$$

echivalent cu sistemul ale cărui soluţii sunt punctele staţionare ale funcţiei lui Lagrange. Acest sistem are o singură soluţie

$$\Big(a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{2}, \frac{a\sqrt[3]{2}}{2}; -\frac{2\sqrt[3]{4}}{a}\Big),$$

din care rezultă că funcţia scop $S = S(x, y, z)$ are punctul staţionar condiţionat

$$M_0\Big(a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{2}, \frac{a\sqrt[3]{2}}{2}\Big)$$

corespunzător valorii $\lambda_0 = -\dfrac{2\sqrt[3]{4}}{a}$ a multiplicatorului Lagrange $\lambda$.

Diferenţierea legăturii în punctul staţionar condiţionat pune în evidenţă următoarea legătură între diferenţialele variabilelor $x$, $y$ şi $z$

$$dz = -\frac{1}{2}(dx + dy).$$

Calculul diferenţialei a doua a funcţiei lui Lagrange în punctul ei staţionar, în care se ţine cont de legătura dintre diferenţialele variabilelor, conduce la expresia

$$d^2\mathcal{L}(M_0; \lambda_0) = 2(dx^2 + dxdy + dy^2).$$

Constatăm că $d^2\mathcal{L}(M_0; \lambda_0)$ este o formă pătratică pozitiv definită ceea ce atrage faptul că punctul $M_0$ este punct de minim condiţionat pentru funcţia scop.

Prin urmare, capacul cutiei trebuie să fie un pătrat cu latura $a\sqrt[3]{2}$ şi dacă înălţimea sa este $\dfrac{a\sqrt[3]{2}}{2}$, atunci aria cutiei, fără capac, are valoarea minimă $S_{\min} = 3a^2\sqrt[3]{4}$. Capacitatea cutiei este evident egală cu $a^3$. ■

**Exemplul 1.4.3** F*ie* $a_i \geq 0$, $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$, $p > 1$ *şi* $q > 0$ *astfel încât*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

*În aceste ipoteze are loc inegalitatea*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\Big)^{\frac{1}{p}} \cdot \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^q\Big)^{\frac{1}{q}},$$

*numită inegalitatea lui Hőlder.*

**Soluţie.** Considerăm funcţia reală de $n$ variabile reale

$$\begin{aligned} &u : D \to I\!\!R_+, \quad u(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \Big(\sum_{i=1}^n a_i^p\Big)^{\frac{1}{p}} \cdot \Big(\sum_{i=1}^n x_i^q\Big)^{\frac{1}{q}}, \\ &D = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in I\!\!R^n |\ x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \cdots, n\} \end{aligned} \tag{1.11}$$

şi egalitatea $A = \sum_{i=1}^n a_i x_i$, în care $A \in I\!\!R$ este o constantă.

Ne propunem să determinăm extremele condiţionate ale funcţiei scop $u$ cu legătura

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = A - \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0. \tag{1.12}$$

Pentru aceasta, considerăm funcţia lui Lagrange

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}; \lambda) = \Big(\sum_{i=1}^n a_i^p\Big)^{\frac{1}{p}} \cdot \Big(\sum_{i=1}^n x_i^q\Big)^{\frac{1}{q}} + \lambda(A - \sum_{i=1}^n a_i x_i),$$

derivatele parţiale de ordinul întâi ale acesteia

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{,j}(\mathbf{x}; \lambda) &= x_j^{q-1}\Big(\sum_{i=1}^n a_i^p\Big)^{\frac{1}{p}} \cdot \Big(\sum_{i=1}^n x_i^q\Big)^{\frac{1}{q}-1} - \lambda a_j, \\ \mathcal{L}_{,\lambda}(\mathbf{x}; \lambda) &= A - \sum_{i=1}^n a_i x_i, \end{cases}$$

şi sistemul de $n+1$ ecuaţii cu necunoscutele $x_1, x_2, \cdots, x_n$ şi $\lambda$

$$\begin{cases} x_j^{q-1}\Big(\sum_{i=1}^n a_i^p\Big)^{\frac{1}{p}} \cdot \Big(\sum_{i=1}^n x_i^q\Big)^{\frac{1}{q}-1} = \lambda a_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n, \\ \sum_{i=1}^n a_i x_i = A, \end{cases} \tag{1.13}$$

obţinut prin anularea derivatelor parţiale de ordinul întâi ale funcţiei $\mathcal{L}$.

Fără a restrânge generalitatea putem presupune că $x_i > 0$ şi $a_i > 0$. Împărţind membru cu membru oricare două ecuaţii din primele $n$ ale sistemului (1.13), de exemplu cele de indici $j$ şi $m$, avem

$$\Big(\frac{x_j}{x_m}\Big)^{q-1} = \frac{a_j}{a_m}.$$

Pentru un $m$ fixat, rezultă

$$x_j = x_m\Big(\frac{a_j}{a_m}\Big)^{\frac{1}{q-1}}, \quad j \in \{1, 2, \cdots, n\} \setminus \{m\}. \tag{1.14}$$

Înlocuind (1.14) în (1.12), obţinem

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq m}}^{n} a_i x_m\Big(\frac{a_i}{a_m}\Big)^{\frac{1}{q-1}} + a_m x_m = A,$$

sau

$$\frac{x_m}{a_m^{\frac{1}{q-1}}} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^{\frac{q}{q-1}} = A. \tag{1.15}$$

Dacă ţinem cont că $\dfrac{q}{q-1} = p$ şi $\dfrac{1}{q-1} = \dfrac{p}{q}$, din (1.15) deducem coordonatele $x_m^0$ ale punctului staţionar condiţionat $\mathbf{x}^0$ al funcţiei $u$

$$x_m^0 = \frac{A}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p} a_m^{\frac{p}{q}}, \quad m = 1, 2, \cdots, n. \tag{1.16}$$

Diferenţiala de ordinul 1 a funcţiei lui Lagrange într–un punct arbitrar al ei este

$$d\mathcal{L}(\mathbf{x};\lambda) = \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^q\Big)^{\frac{1}{q}-1}\sum_{j=1}^{n} x_j^{q-1}dx_j - \lambda\sum_{j=1}^{n} a_j dx_j. \tag{1.17}$$

Dar punctul $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D$ verifică legătura (1.12) care, după diferenţiere, devine

$$\sum_{j=1}^{n} a_j dx_j = 0. \tag{1.18}$$

Folosirea acesteia în (1.17) conduce la

$$d\mathcal{L}(\mathbf{x};\lambda) = \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^q\Big)^{\frac{1}{q}-1}\sum_{j=1}^{n} x_j^{q-1}dx_j.$$

Diferenţiind în ambii membri această nouă expresie, obţinem

$$\begin{aligned} d^2\mathcal{L}(\mathbf{x};\lambda) = \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big[(q-1)\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^q\Big)^{\frac{1}{q}-1}\sum_{j=1}^{n} x_j^{q-2}dx_j^2 + \\ +(1-q)\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^q\Big)^{\frac{1}{q}-2}\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j^{q-1}dx_j\Big)^2\Big]. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Să cercetăm ce devine diferenţiala (1.19) în punctul staţionar condiţionat $\mathbf{x}^0$ al funcţiei $u$.

Folosind (1.16) precum şi relaţiile între $p$ şi $q$ constatăm mai întâi că

$$\sum_{m=1}^{n}(x_j^0)^{q-1}dx_j = \sum_{m=1}^{n}\Big(\frac{A}{\sum_{i=1}^{n}a_i^p}a_j^{\frac{p}{q}}\Big)^{q-1}dx_j = \Big(\frac{A}{\sum_{i=1}^{n}a_i^p}\Big)^{q-1}\cdot\sum_{m=1}^{n}a_j dx_j = 0.$$

Cu acestea, diferenţiala de ordinul 2 a funcţiei $\mathcal{L}$ în punctul ei staţionar este (de valoarea lui $\lambda^0$ nu avem nevoie pentru că ea nu apare în exprsia (1.19))

$$d^2\mathcal{L}(\mathbf{x}^0;\lambda^0) = (q-1)\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{i=1}^{n}(x_i^0)^q\Big)^{\frac{1}{q}-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j^0)^{q-2}dx_j^2. \tag{1.20}$$

Fără a utiliza relaţia (1.18), constatăm că (1.20) este o formă pătratică pozitiv definită pe $I\!R^n$. Dacă însă utilizăm (1.18), diferenţiala (1.20) este, de asemenea, o formă pătratică pozitiv definită, însă pe $I\!R^{n-1}$.

Aşadar, funcţia $u$ are un punct de minim condiţionat global, iar valoarea sa minimă este $u_{\min} = u(\mathbf{x}^0) = A$ şi ca atare se poate scrie

$$A \le u(x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad (\forall)\ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D. \tag{1.21}$$

Din (1.12), (1.11) şi (1.21) rezultă inegalitatea lui Hőlder. ■

**Exerciţiul 1.4.8** *Fie* $D = \{(x,y) \in I\!R^2 |\ x \ge 0, y \ge 0\}$ *şi* $n \in I\!N^*$. *Să se demonstreze că are loc inegalitatea*

$$\frac{x^n + y^n}{2} \ge \Big(\frac{x+y}{2}\Big)^n, \quad (\forall)\ (x,y) \in D.$$

**Soluţie.** Determinăm extremele condiţionate ale funcţiei scop

$$f : D \to I\!R_+, \quad f(x,y) = \frac{x^n + y^n}{2}$$

cu legătura

$$F(x,y) = s - x - y = 0,$$

unde $s$ este un număr nenegativ considerat ca un parametru. Funcţia lui Lagrange corespunzătoare este

$$\mathcal{L}(x,y;\lambda) = f(x,y) + \lambda F(x,y) = \frac{x^n + y^n}{2} + \lambda(s - x - y),$$

iar derivatele parţiale de ordinul 1 ale sale sunt:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y;\lambda) & = & \dfrac{n}{2}x^{n-1} - \lambda; \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y;\lambda) & = & \dfrac{n}{2}y^{n-1} - \lambda; \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x,y;\lambda) & = & s - x - y. \end{cases}$$

Sistemul format prin anularea derivatelor parţiale de ordinul 1 are soluţia

$$x_0 = \frac{s}{2}, \quad y_0 = \frac{s}{2}; \quad \lambda_0 = \frac{n}{2}\Big(\frac{s}{2}\Big)^{n-1}$$

şi deci $(x_0, y_0; \lambda_0)$ este punct critic al funcţiei lui Lagrange, iar $M_0(x_0, y_0)$ este punct staţionar condiţionat al funcţiei scop $f$ corespunzător valorii $\lambda_0$ a multiplicatorului Lagrange $\lambda$.

Natura punctului staţionar condiţionat al funcţiei scop $f$ este aceeaşi cu natura punctului critic al funcţiei lui Lagrange, aceasta din urmă stabilindu–se în urma studierii diferenţialei de ordinul al doilea al funcţiei $\mathcal{L}$ în punctul $(x_0, y_0; \lambda_0)$.

Dacă avem în vedere că $dy = -dx$, fapt ce rezultă din diferenţierea legăturii $F(x,y) = 0$, rezultă că

$$d^2\mathcal{L}(x_0, y_0; \lambda_0) = n(n-1)\Big(\frac{s}{2}\Big)^{n-2} dx^2,$$

din care se vede că diferenţiala de studiat este o formă pătratică pozitiv definită pe $I\!R$, fapt ce atrage că $M_0$ este punct de minim global al funcţiei scop $f$. Prin urmare,

$$f(x,y) \geq f(x_0, y_0) \Longrightarrow \frac{x^n + y^n}{2} \geq \frac{(\frac{s}{2})^n + (\frac{s}{2})^n}{2} = \Big(\frac{s}{2}\Big)^n = \Big(\frac{x+y}{2}\Big)^n$$

şi cu acestea inegalitatea este demonstrată. ■

**Exemplul 1.4.4** *Dacă forma pătratică*

$$h : I\!R^n \to I\!R, \quad h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

*este pozitiv definită, există* $\alpha > 0$ *şi* $\beta > 0$ *astfel încât*

$$\alpha \|\mathbf{x}\|^2 \leq h(\mathbf{x}) \leq \beta \|\mathbf{x}\|^2, \quad (\forall)\ \mathbf{x} \in I\!R^n, \tag{1.22}$$

*unde* $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ *este norma euclidiană a vectorului* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

**Soluţie.** Vom determina întâi valorile extreme ale funcţiei $h$ pe sfera din spaţiul euclidian $I\!R^n$ cu centrul în origine şi raza unitate

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - 1 = 0.$$

Aceasta este o problemă de extrem condiţionat a funcţiei $h$ cu legătura

$$F(\mathbf{x}) = F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 1 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2 = 0.$$

Pentru a o rezolva, introducem funcţia lui Lagrange

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}; \lambda) = h(\mathbf{x}) + \lambda F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + \lambda (1 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2),$$

determinăm derivatele parţiale de ordinul 1 ale sale

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(\mathbf{x}; \lambda) & = & 2\Big(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - \lambda x_i\Big), \quad i = 1, 2, \cdots, n, \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(\mathbf{x}; \lambda) & = & 1 - \|\mathbf{x}\|^2, \end{cases}$$

şi apoi rezolvăm sistemul de $n+1$ ecuaţii în necunoscutele $x_1, x_2, \cdots, x_n$ şi $\lambda$

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - \lambda \delta_{ij}) x_j = 0, \\ 1 - \|\mathbf{x}\|^2 = 0, \end{cases} \tag{1.23}$$

obţinut prin anularea derivatelor parţiale în care, folosind simbolul Kronecker $\delta_{ij}$, termenul $-\lambda x_i$ al ecuaţiei de rang $i$ s–a scris ca $-\lambda \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} x_j$.

În calculul derivatelor parţiale ale funcţiei $\mathcal{L}$ în raport cu variabilele $x_i$ s–au aplicat regulile de derivare a sumei şi produsului de funcţii şi s–a ţinut

cont de faptul că matricea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(I\!R)$ a formei pătratice $h$ este simetrică ($a_{ij} = a_{ji}$).

Subsistemul format de primele $n$ ecuaţii ale sistemului (1.23)

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0, \\ a_{21}x_1 & + & (a_{22}-\lambda)x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0, \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & (a_{nn}-\lambda)x_n & = & 0 \end{cases}$$

este un sistem liniar şi omogen în necunocutele $x_1$, $x_2, \cdots$, $x_n$, necunoscuta $\lambda$ fiind considerată un parametru real. Acesta are soluţii nebanale dacă şi numai dacă determinantul matricei sale este nul,

$$P(\lambda) = \det{(A - \lambda I_n)} = 0.$$

Ecuaţia $P(\lambda) = 0$ este ecuaţia caracteristică a matricei $A$, iar rădăcinile sale sunt valorile proprii ale matricei $A$. Deorece $h$ este formă pătratică pozitiv definită, matricea acesteia $A$ are valorile proprii reale, pozitive şi distincte. Fie că acestea sunt $\lambda_1$, $\lambda_2, \cdots \lambda_n$.

Prin urmare, pentru fiecare valoare a lui $i$ între 1 şi $n$, sistemul

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_i)x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0, \\ a_{21}x_1 & + & (a_{22}-\lambda_i)x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0, \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & (a_{nn}-\lambda_i)x_n & = & 0 \end{cases} \tag{1.24}$$

are soluţii nebanale. Fie $\mathbf{y}^{(i)} = (y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \cdots, y_n^{(i)})$ o astfel de soluţie. Sistemul (1.24) fiind liniar şi omogen, rezultă că $\mathbf{x}^{(i)} = k\mathbf{y}^{(i)}$ este, de asemenea, soluţie nebanală dacă $k$ este o constantă reală nenulă oarecare. În particular, pentru $k = \dfrac{1}{\|\mathbf{y}^{(i)}\|}$ soluţia corespunzătoare a sistemului (1.24) este de normă unitate.

Dacă $\mathbf{x}^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \cdots, x_n^{(i)})$ este o soluţie nebanală a sistemului (1.24), cu

$$\|\mathbf{x}^{(i)}\| = 1 \quad \Longrightarrow \quad (x_1^i)^2 + (x_2^{(i)})^2 + \cdots + (x_n^{(i)})^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad F(\mathbf{x}^{(i)}) = 0, \tag{1.25}$$

atunci

$$(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \cdots, x_n^{(i)}; \lambda_i) \tag{1.26}$$

este un punct staţionar pentru funcţia lui Lagrange, iar

$$M_i(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \cdots, x_n^{(i)})$$

este punct staţionar condiţionat pentru funcţia $h$ corespunzător valorii $\lambda_i$ a multiplicatorului lui Lagrange.

Să determinăm valorile funcţiei $h$ în punctele staţionare condiţionate $M_1$, $M_2, \cdots$, $M_n$. Pentru aceasta, scriem relaţiile

$$\begin{cases} a_{11}x_1^{(i)} + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = \lambda_i x_1^{(i)}, \\ a_{21}x_1^{(i)} + a_{22}x_2^{(i)} + \cdots + a_{2n}x_n & = \lambda_i x_2^{(i)}, \\ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \\ a_{n1}x_1^{(i)} + a_{n2}x_2^{(i)} + \cdots + a_{nn}x_n^{(i)} & = \lambda_i x_n^{(i)}, \end{cases} \tag{1.27}$$

care exprimă faptul că $\mathbf{x}^{(i)}$ este o soluţie a sistemului (1.24). Dacă înmulţim cele $n$ egalităţi din (1.27) respectiv cu $x_1^{(i)}$, $x_2^{(i)}$, $\cdots$, $x_n^{(i)}$, adunăm rezultatele membru cu membru şi ţinem seama de (1.25), obţinem

$$h(\mathbf{x}^{(i)}) = \lambda_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{1.28}$$

Diferenţialele de ordinul 2 ale funcţiei lui Lagrange în punctele staţionare (1.26) au expresiile

$$d^2\mathcal{L}(\mathbf{x}^{(i)}; \lambda_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}dx_i dx_j$$

şi cum $h$ este o formă pătratică pozitiv definită va rezulta că şi aceatea sunt forme pătratice pozitiv definite.

Aşadar, toate cele $n$ puncte staţionare condiţionate ale funcţiei $h$ sunt puncte de minim condiţionat, iar valorile sale în aceste puncte sunt $\lambda_1$, $\lambda_2, \cdots$, $\lambda_n$.

Fie $\alpha = \min\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$, $\beta = \max\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$. Atunci,

$$\alpha \leq h(\mathbf{x}), \quad (\forall)\ \mathbf{x} \in I\!R^n, \quad \|\mathbf{x}\| = 1. \tag{1.29}$$

Pe de altă parte, funcţia $h$ fiind un polinom omogen de gradul al doilea în variabilele $x_1, x_2, \cdots$, $x_n$, deci o funcţie continuă, iar sfera

$$(S) = \{\mathbf{x} \in I\!R^n |\ \|\mathbf{x}\| = 1\} \subset I\!R^n$$

o mulţime compactă în $I\!R^n$, conform teoremei lui Weierstrass, funcţia $h$ este mărginită şi îşi atinge efectiv marginile.

Din (1.29) rezultă că marginea inferioară a valorilor funcţiei $h$ în punctele sferei $(S)$ este $\alpha$.

Cât priveşte marginea superioară a valorilor funcţiei $h$ pe sfera $(S)$, aceasta este $\beta$, deoarece, în caz contrar, din (1.28) şi din faptul că oricare din punctele $M_1, M_2, \cdots, M_n$ este punct de minim condiţionat al funcţiei $h$ rezultă că există o vecinătate $V$ în $I\!R^n$ a punctului considerat cu proprietatea că valorile funcţiei $h$ în punctele intersecţiei acestei vecinătăţi cu sfera $(S)$ sunt mai mari sau cel puţin egale cu $\beta$. Acest rezultat însă contrazice că $\beta$ este marginea superioară a valorilor funcţiei $h$ în punctele sferei $(S)$.

În concluzie, dacă ţinem cont şi de (1.29), putem afirma că

$$\alpha \le h(\mathbf{x}) \le \beta, \quad (\forall)\ \mathbf{x} \in I\!R^n, \quad \|\mathbf{x}\| = 1. \tag{1.30}$$

Forma pătratică $h$ fiind o funcţie omogenă de gradul doi, avem

$$h(t\mathbf{x}) = t^2 h(\mathbf{x}), \quad (\forall)\ \mathbf{x} \in I\!R^n, \quad (\forall)\ t \in I\!R. \tag{1.31}$$

Să considerăm acum un element oarecare $\mathbf{x} \in I\!R^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. Dacă acest vector este versor, atunci (1.30) este echivalentă cu

$$\alpha\|\mathbf{x}\|^2 \le h(\mathbf{x}) \le \beta\|\mathbf{x}\|^2, \quad (\forall)\ \mathbf{x} \in (S). \tag{1.32}$$

Dacă vectorul $\mathbf{x} \in I\!R^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ nu este versor, atunci vectorul

$$\mathbf{y} = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\mathbf{x} \tag{1.33}$$

este versor şi, conform (1.30),

$$\alpha \le h(\mathbf{y}) \le \beta. \tag{1.34}$$

Relaţiile (1.31) $-$ (1.34) conduc la

$$\alpha\|\mathbf{x}\|^2 \le h(\mathbf{x}) \le \beta\|\mathbf{x}\|^2, \quad (\forall)\ \mathbf{x} \in I\!R^n \setminus \{\mathbf{0}\}. \tag{1.35}$$

În sfârşit, considerând vectorul nul din $I\!R^n$ şi ţinând cont că $h(\mathbf{0}) = 0$, avem

$$\alpha\|\mathbf{0}\|^2 = h(\mathbf{0}) = \beta\|\mathbf{0}\|^2. \tag{1.36}$$

Din (1.35) şi (1.36) rezultă (1.22), ceea ce trebuia de demonstrat. ∎

**Exerciţiul 1.4.9** *Să se găsească cea mai mică şi cea mai mare valoare a funcţiei*

$$f : D \to I\!R, \quad f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \cdots + \frac{a_n}{x_n},$$

*ştiind că* $x_1 > 0,\ x_2 > 0, \cdots,\ x_n > 0$ *satisfac condiţia (legătura)*

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n - p = 0,$$

*unde:* $a_1, a_2, \cdots, a_n; b_1, b_2, \cdots, b_n; p$ *sunt numere pozitive cunoscute.*

**Soluţie.** Vom determina valorile extreme ale funcţiei $f$ în condiţiile impuse folosind metoda multiplicatorilor a lui Lagrange. Pentru aceasta introducem funcţia

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \cdots, x_n; \lambda) = \frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \cdots + \frac{a_n}{x_n} + \lambda(b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n - p).$$

Anularea derivatelor parţiale de ordinul întâi ale acestei funcţii conduce la punctul staţionar condiţionat $M_0$ al funcţiei $f$ ale cărui coordonate sunt

$$x_i^0 = \frac{p}{\sqrt{a_1b_1} + \sqrt{a_2b_2} + \cdots + \sqrt{a_nb_n}}\sqrt{\frac{a_i}{b_i}}, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

punct ce corespunde valorii

$$\lambda_0 = \frac{(\sqrt{a_1b_1} + \sqrt{a_2b_2} + \cdots + \sqrt{a_nb_n})^2}{p^2}$$

a multiplicatorului Lagrange $\lambda$.

Diferenţiala a doua a funcţiei Lagrange în punctul ei staţionar $(M_0; \lambda_0)$ este

$$d^2\mathcal{L}(M_0; \lambda_0) = \frac{2a_1}{(x_1^0)^3}dx_1^2 + \frac{2a_2}{(x_2^0)^2}dx_2^2 + \cdots + \frac{2a_n}{(x_n^0)^2}dx_n^2, \tag{1.37}$$

în care trebuie să se ţină cont de faptul că diferenţialele $dx_1,\ dx_2, \cdots,\ dx_n$ satisfac relaţia

$$b_1dx_1 + b_2dx_2 + \cdots + b_ndx_n = 0, \tag{1.38}$$

obţinută prin diferenţierea legăturii.

Din (1.37) şi (1.38) rezultă că diferenţiala a doua a funcţiei $\mathcal{L}$ în punctul ei staţionar este o formă pătratică pozitiv definită şi deci $M_0$ este punct de minim condiţionat al funcţiei $f$, valoarea minimă fiind

$$f(M_0)=\frac{1}{p}\Big(\sqrt{a_1b_1}+\sqrt{a_2b_2}+\cdots+\sqrt{a_nb_n}\Big)^2.$$

Punctul de extrem astfel determinat este global, ceea ce permite scrierea inegalităţii

$$\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}+\cdots+\frac{a_n}{x_n}\ge\frac{1}{p}\Big(\sqrt{a_1b_1}+\sqrt{a_2b_2}+\cdots+\sqrt{a_nb_n}\Big)^2,$$

oricare ar fi numerele pozitive $x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n$ care satisfac condiţia $b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n-p=0$. ∎

**Exemplul 1.4.5** F*ie* $A$ *media aritmetică a numerelor nenegative* $x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n$*. Atunci au loc inegalităţile:*

$$\begin{cases} x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n\le\dfrac{n(n-1)}{1\cdot 2}A^2;\\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\cdots+x_{n-2}x_{n-1}x_n\le\dfrac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}A^3;\\ x_1x_2x_3x_4+x_1x_2x_3x_5+\cdots+x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}x_n\le C_n^4A^4;\\ \vdots \end{cases}\tag{1.39}$$

*unde* $C_n^k$ *înseamnă combinări de* $n$ *elemente luate câte* $k$*.*

**Soluţie.** Pentru demonstrarea primei inegalităţi vom folosi metoda multiplicatorilor lui Lagrange pentru determinarea extremelor funcţiei scop

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n,$$

condiţionate de legătura

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1+x_2+\cdots+x_n-nA=0.$$

Funcţia lui Lagrange este

$$\mathcal{L}(x_1,x_2,\cdots,x_n;\lambda)=x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n+\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n-nA),$$

iar sistemul

$$\begin{cases} x_2+x_3+x_4+\cdots+x_n+\lambda & = & 0,\\ x_1+x_3+x_4+\cdots+x_n+\lambda & = & 0,\\ x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{n-1}+\lambda & = & 0,\\ \vdots & & \\ x_1+x_2+\cdots+x_n-nA & = & 0, \end{cases}$$

obţinut prin anularea derivatelor parţiale de ordinul întâi ale funcţiei $\mathcal{L}$, are o singură soluţie

$$\Big(-\frac{1}{A},-\frac{1}{A},\cdots,-\frac{1}{A};\frac{n-1}{A}\Big),$$

de unde deducem că funcţia scop $f$ are punctul staţionar condiţionat

$$M_0\Big(-\frac{1}{A},-\frac{1}{A},\cdots,-\frac{1}{A}\Big)$$

ce corespunde valorii $\lambda_0=\dfrac{n-1}{A}$ a multiplicatorului lui Lagrange $\lambda$.

Pentru determinarea naturii punctului staţionar condiţionat găsit, calculăm diferenţiala de ordin doi a funcţiei Lagrange în punctul ei staţionar $(M_0;\lambda_0)$, în acest calcul având grijă să ţinem cont de faptul că

$$dx_1+dx_2+\cdots+dx_n=0,$$

relaţie obţinută prin diferenţierea legăturii. Într–o primă fază se găseşte

$$d^2\mathcal{L}(M_0;\lambda_0)=2(dx_1dx_2+dx_1dx_3+\cdots+dx_{n-1}dx_n).$$

Dacă în această expresie se foloseşte legătura între diferenţialele variabilelor $x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n$, atunci

$$d^2\mathcal{L}(M_0;\lambda_0)=2(-dx_1^2-dx_2^2-\cdots-dx_{n-1}^2-dx_1dx_2-dx_1dx_3-\cdots-dx_{n-2}dx_{n-1}).$$

Noua expresie a diferenţialei de ordinul doi a funcţiei Lagrange în punctul $(M_0;\lambda_0)$ este o formă pătratică pe $I\!R^{n-1}$ de matrice (pătratică de ordinul $n-1$)

$$H=\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & -2 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & -1 & -2 & \cdots & -1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -2 \end{pmatrix}.$$

Vom folosi metoda valorilor proprii pentru determinarea naturii acestei forme pătratice şi în acest sens vom analiza rădăcinile polinomului caracteristic $P(\lambda)$ al matricei $H$ egal, după cum se ştie, cu $P(\lambda) = \det(H - \lambda I_{n-1})$, unde $I_{n-1}$ este matricea unitate de ordinul $n-1$. Se obţine

$$P(\lambda) = (-n-\lambda)(-1-\lambda)^{n-2},$$

iar rădăcinule ecuaţiei caracteristice $P(\lambda) = 0$, identice cu valorile proprii ale matricei $H$, sunt $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-2} = -1$ şi $\lambda_{n-1} = -n$.

Cum toate valorile proprii ale matricei $H$ sunt negative rezultă că $d^2\mathcal{L}(M_0; \lambda_0)$ este o formă pătratică negativ definită, ceea ce atrage că punctul staţionar condiţioant $M_0$ al funcţiei scop $f$ este un punct de maxim condiţionat, valoarea sa fiind

$$f_{\max} = f(M_0) = A^2 + A^2 + \cdots + A^2 = C_n^2 A^2 = \frac{n(n-1)}{2!} A^2.$$

Se vede că punctul de maxim condiţionat determinat este global şi ca atare

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n \leq \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} A^2,$$

oricare ar fi numerele nenegative $x_1, x_2, \cdots, x_n$ a căror sumă este $nA$.

În mod analog se demonstrează şi celelalte inegalităţi, schimbându–se de fiecare dată doar funcţia scop. ■

## 1.4.2 Probleme propuse

**Exerciţiul 1.4.10** *Să se găsească paralelipipedul de volum maxim, astfel ca suma dimensiunilor sale să fie constantă.*

**Indicaţie**. Notăm cele trei dimensiuni ale paralelipipedului cu $x, y, z$. Ele sunt legate prin relaţia

$$F(x, y, z) = x + y + z - a = 0.$$

Volumul paralelipipedului este $V = xyz$. Problema se reduce la a găsi extremele condiţionate ale funcţiei $f(x, y, z) = xyz$ cu legătura $F(x, y, z) = 0$. Se aplică metoda multiplicatorilor lui Lagrange.
**Răspuns**. $M_0(a/3, a/3, a/3)$ este punct de maxim condiţionat corespunzător valorii $\lambda_0 = -a^3/9$ a multiplicatorului Lagrange $\lambda$. Volumul maxim este $V_{\max} = a^3/27$. ■

**Exerciţiul 1.4.11** *Să se determine dimensiunile unei cisterne având forma unui paralelipiped dreptunghic astfel încât să aibă:*

1. *aria totală* $2a^2$ *şi capacitate maximă;*
2. *capacitate dată* $a^3$ *şi suprafaţă totală minimă*

**Răspuns**.

1. $V_{\max} = V(\dfrac{a}{\sqrt{3}}, \dfrac{a}{\sqrt{3}}, \dfrac{a}{\sqrt{3}}) = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$;
2. $S_{\min} = S(a, a, a) = 6a^2$.

■

**Exerciţiul 1.4.12** *Să se determine punctele de extrem ale funcţiei scop*

$$f : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \to I\!R, \quad f(x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y,$$

*condiţionate de legătura* $F(x, y) = x - y - \dfrac{\pi}{4} = 0.$

**Indicaţie**. Se aplică metoda multiplicatorilor lui Lagrange, funcţia $\mathcal{L}$ fiind

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = \cos^2 x + \cos^2 y + \lambda\Big(x - y - \frac{\pi}{4}\Big).$$

**Răspuns**. Sistemul din care rezultă punctele staţionare ale funcţiei $\mathcal{L}$ are soluţiile:

$$x_1 = \frac{5\pi}{8}, y_1 = \frac{3\pi}{8}, \lambda_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2};\; x_2 = \frac{9\pi}{8}, y_2 = \frac{7\pi}{8}, \lambda_2 = \frac{\sqrt{2}}{2};$$
$$x_3 = \frac{13\pi}{8}, y_3 = \frac{11\pi}{8}, \lambda_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Se deduce că $f$ are trei puncte staţionare condiţionate: $M_1(x_1, y_1)$; $M_2(x_2, y_2)$; $M_3(x_3, y_3)$, corespunzătoare valorilor $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ ale multiplicatorului Lagrange $\lambda$.

Punctele $M_1$ şi $M_3$ sunt puncte de minim condiţionat şi $f_{\min} = f(M_1) = f(M_3) = (2 - \sqrt{2})/2$, iar $M_2$ este punct de maxim condiţionat şi $f_{\max} = f(M_2) = (2 + \sqrt{2})/2$. ■

**Exerciţiul 1.4.13** *Să se determine extremele funcţiei scop*

$$f(x,y,z) = x + y + z$$

*condiţionate de legătura* $F(x,y,z) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} - 1 = 0.$

**Răspuns**. $f_{\min} = f(3,3,3) = 9.$ ■

**Exerciţiul 1.4.14** *Să se determine extremele funcţiei scop*

$$f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4$$

*condiţionate de legătura* $F(x,y,z) = x + y + z - 3 = 0.$

**Răspuns**. $M_0(1,1,1)$ este punct de minim condiţionat corespunzător valorii $\lambda_0 = -4$ a multiplicatorului lui Lagrange. ■

**Exerciţiul 1.4.15** *Să se determine punctele de extrem local ale funcţiei*

$$f : D \to I\!R, \quad f(x,y,z) = xyz, \quad D = \{\mathbf{x} = (x,y,z) \in I\!R^3 |\, x > 0, y > 0, z > 0\},$$

*condiţionate de legăturile* $F_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ *şi* $F_2(x,y,z) = x + y - z = 0.$

*Ce interpretare geometrică poate fi dată rezultatului determinat?*

**Indicaţie**. Se aplică metoda multiplicatorilor lui Lagrange.

**Răspuns**. Punctul $M_0\Big(\dfrac{\sqrt{6}}{6}, \dfrac{\sqrt{6}}{6}, \dfrac{\sqrt{6}}{3}\Big)$ este punct de minim condiţionat corespunzător valorilor $\lambda_0 = \dfrac{\sqrt{6}}{12}$, $\mu_0 = \dfrac{1}{6}$ ai multiplicatorilor lui Lagrange $\lambda$, $\mu$ şi $f_{\min} = f(M_0) = \dfrac{\sqrt{6}}{18}.$

Rezultatul găsit poate fi interpretat geometric astfel: dintre toate paralelipipedele dreptunghice din primul octant cu trei dintre feţe coincizând cu planele de coordonate ale reperului $Oxyz$ şi vârful opus originii situat pe porţiunea din primul octant a cercului de intersecţie dintre sfera cu centrul în origine şi raza 1 cu planul $x + y - z = 0$, cel care are vârful opus originii în punctul $M_0$ are volum minim, egal cu $\dfrac{\sqrt{6}}{18}.$ ■

# 1.5 Extremele funcţiilor reale definite pe mulţimi compacte în $\mathbb{R}^m$

## 1.5.1 Exemple şi exerciţii rezolvate

**Exemplul 1.5.1** *În planul raportat la reperul cartezian $Oxy$ se consideră mulţimea*

$$K = \{M(x,y) : \; x \geq 0, \; y \geq 0, \; x + y - 1 \leq 0\}.$$

*Dintre toate punctele acestei mulţimi compacte limitată de segmentele $OA$, $OB$ şi $AB$, unde $A(1,0)$ şi $B(0,1)$, există unul cu proprietatea că suma pătratelor distanţelor euclidiene la punctele $O$, $A$ şi $B$ este cea mai mică.*

**Soluţie.** Suma pătratelor distanţelor euclidiene de la un punct $M(x,y) \in K$ la cele trei puncte este :

$$f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2. \tag{5.1}$$

Problema se reduce atunci la aflarea celei mai mici valori a funcţiei

$$f \in \mathcal{F}(K), \quad f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2, \quad (\forall) \; (x,y) \in K. \tag{1.40}$$

Căutăm punctele de extrem ale restricţiei funcţiei (1.40) la interiorul domeniului de definiţie.

Pentru aceasta rezolvăm sistemul format prin anularea derivatelor parţiale de ordinul întâi ale lui $f$.

Se găseşte punctul $M_0(x_0, y_0)$, unde $x_0 = \dfrac{1}{3}$, şi $y_0 = \dfrac{1}{3}$.

Diferenţiala a doua a funcţiei $f$ în punctul $M_0$ este $d^2 f(x_0, y_0) = 6dx^2 + 6dy^2$. Această diferenţială este o formă pătratică pozitiv definită, deci $M_0$ este punct de minim local al funcţiei $f$ aflat în interiorul domeniului de definiţie al funcţiei. Valoarea funcţiei $f$ în acest punct este $f(x_0, y_0) = \dfrac{4}{3}$.

Examinăm acum valorile lui $f$ pe segmentul $OA$ care face parte din frontiera lui $K$. Pentru aceasta este suficient să punem $y = 0$ în expresia lui $f(x,y)$. Obţinem astfel valorile restricţiei funcţiei $f$ la acest segment, pe care o notăm cu $f_{/OA}$

$$f_{/OA} : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_{/OA}(x) = 2x^2 + (x-1)^2 + 1, \quad x \in [0,1]. \tag{1.41}$$

Funcţia reală de variabilă reală din (1.41) are un singur punct staţionar căci derivata acesteia se anulează într–un singur punct din itervalul $(0,1)$ şi anume $x_0 = \dfrac{1}{3}$.

Diferenţiala a doua a funcţiei (1.41) în punctul $x_0 = \dfrac{1}{3}$ este $d^2 f_{/OA}(x_0) = 6dx^2$ care evident este formă pătratică pozitiv definită şi ca atare punctul $M_1(x_0, 0)$ este punct de minim pentru funcţia $f$ care are în acest punct valoarea $\dfrac{5}{3}$.

Să remarcăm că în extremităţile intervalului $[0,1]$ funcţia din (1.41) are valori extreme de asemenea însă ambele sunt puncte de maxim.

Într–un mod similar se constată că cea mai mică valoare a restricţiei funcţiei $f$ la segmentul $OB$ este $\dfrac{5}{3}$ şi reprezintă valoarea lui $f$ în punctul de minim $M_2\Big(0,\ \dfrac{1}{3}\Big)$.

Pentru a examina valorile lui $f$ pe segmentul deschis $BA$ vom considera restricţia sa la acest segment care se obţine din $f(x,y)$ prin înlocuirea lui $y$ cu valoarea sa scoasă din ecuaţia segmentului $BA$, adică $y = 1 - x,\ \ x \in (0,1)$. Se obţine

$$f_{/BA} : (0,1) \to I\!R, \quad f_{/BA}(x) = 3x^2 + 3(x-1)^2, \quad x \in (0,1). \tag{1.42}$$

Aplicând funcţiei (1.42) algoritmul de determinare a extremelor libere care se desprinde din Secţiunea 8.1, găsim că pentru $x_3 = \dfrac{1}{2}$ se realizează un minim al funcţiei (1.42) de valoare $\dfrac{3}{2}$. Aceasta atrage că în punctul $M_3\Big(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\Big)$, aflat pe segmentul $BA$, funcţia $f$ are un minim local şi valoarea valoarea funcţiei în acest punct este desigur $\dfrac{3}{2}$.

Analiza rezultatelor conduce la concluzia că valoarea cea mai mică a funcţiei $f$ din (1.40) este $\dfrac{4}{3}$ şi este atinsă în punctul $M_0\Big(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\Big)$ care este centrul de greutate al unei plăci plane omogene ce ocupă domeniul $K$. ■

**Exemplul 1.5.2** C*ea mai mare valoare a funcţiei reale*

$$f \in \mathcal{F}(K), \quad f(x,y) = x^2 - y^2, \quad (x,y) \in K,$$

*unde $K$ este discul închis cu centrul în origine şi rază* 2, *este atinsă într–un punct de pe frontiera mulţimii $K$.*

**Soluţie.** Deoarece $K = \overline{B}(\mathbf{0}, 2)$ rezultă că această mulţime se poate scrie în forma
$$K = \{(x, y) \in I\!\!R^2 : \ x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Singurul punct staţionar al restricţiei funcţiei $f$ la mulţimea $\overset{\circ}{K}$ este originea reperului $Oxy$, care se vede imediat că nu este punct de extrem al funcţiei deoarece diferenţiala a doua a funcţiei $f$ în acest punct este $d^2f(\mathbf{0}) = 2dx^2 - 2dy^2$ care este formă pătratică nedefinită deci originea reperului este punct şa pentru funcţia $f$.

Determinăm valorile extreme ale restricţiei funcţiei $f$ la frontiera mulţimii $K$, deci la cercul de ecuaţie $F(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$. Pentru aceasta folosim metoda multiplicatorilor lui Lagrange. Funcţia lui Lagrange este

$$\mathcal{L}(x, y; \lambda) = f(x, y) + \lambda\, F(x, y) = x^2 - y^2 + \lambda\,(x^2 + y^2 - 4).$$

Sistemul care dă punctele staţionare ale funcţiei $\mathcal{L}$

$$\begin{cases} \ \ 2x + 2\lambda y = 0, \\ -2y + 2\lambda\, y = 0, \\ x^2 + y^2 - 4 = 0, \end{cases}$$

are soluţiile:

$$(2, 0; -1); \quad (-2, 0; -1); \quad (0, 2; 1); \quad (0, -2; 1).$$

Rezultă atunci că funcţia scop $f$ are punctele staţionare condiţionate

$$M_1(2, 0), \quad M_2(-2, 0), \quad M_3(0, 2), \quad M_4(0, -2),$$

primele două corespunzătoare valorii $\lambda = -1$, ultimele fiind corespunzătoare valorii $\lambda = 1$ a multiplicatorului lui Lagrange $\lambda$.

Diferenţiala a doua într–un punct curent al funcţiei lui Lagrange este

$$d^2\mathcal{L}(x, y; \lambda) = 2(\lambda\, +\, 1)dx^2 + 2(\lambda\, -\, 1)dy^2.$$

Pentru primele două puncte se obţine că diferenţiala a doua a funcţiei lui Lagrange este $-4dy^2$, deci formă pătratică negativ definită, ceea ce atrage că $M_1$ şi $M_2$ sunt puncte de maxim condiţionat. În celelalte două puncte critice ale funcţiei lui Lagrange, diferenţiala a doua este egală cu $4dx^2$. Cum aceasta

este o formă pătratică pozitiv definită, rezultă că $M_3$ şi $M_4$ sunt puncte de minim condiţionat ale funcţiei scop $f$.

În punctele de maxim condiţionat, funcţia $f$ are valoarea 4.

Deci, cea mai mare valoare a funcţiei $f$ este 4 şi aceasta este valoarea funcţiei fie în punctul $M_1$ fie în punctul $M_2$, ambele aflate pe frontiera domeniului de definiţie al funcţiei $f$. ■

**Exemplul 1.5.3** F*ie funcţia*

$$f : D \to I\!R, \quad f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2,$$

*unde* $D = \{\mathbf{x} = (x, y, z) |\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 100\}$.

*Cea mai mică valoare a funcţiei $f$ este atinsă în interiorul domeniului de definiţie, iar cea mai mare, egală cu* 300, *este valoarea sa într–un punct de pe frontieră.*

**Soluţie.** Domeniul $D$ de definiţie al funcţiei $f$ este o mulţime compactă şi reprezintă bila închisă în $I\!R^3$ de rază 10 cu centrul în origine.

Deoarece funcţia $f$ este diferenţiabilă în interiorul mulţimi $D$, pentru a afla valorile sale extreme în puncte ale interiorului mulţimii $D$ procedăm ca la determinarea punctelor de extrem local ale unei funcţii reale de mai multe variabile reale.

Sistemul format prin anularea derivatelor parţiale de ordinul întâi ale funcţiei $f$ are doar soluţia $(0, 0, 0)$ şi deci singurul punct staţionar al funcţiei $f$ este originea reperului.

Diferenţiala de ordinul al doilea a funcţiei $f$ în origine este

$$d^2 f(0, 0, 0) = 2dx^2 + 4dy^2 + 6dz^2$$

şi este evident că este o formă pătratică pe $I\!R^3$, pozitiv definită.

Prin urmare, în origine, funcţia $f$ are un punct de minim iar valoarea minimă este zero.

Să determinăm valorile extreme ale funcţiei $f$ pe frontiera domeniului acesteia care este sfera de ecuaţie

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 100 = 0.$$

Deci, trebuie să rezolvăm o problemă de extrem condiţionat în care funcţia scop este $f$ iar legătura este ecuaţia de mai sus. Pentru aceasta, introducem funcţia lui Lagrange

$$\mathcal{L}(x, y, z; \lambda) = f(x, y, z) + \lambda F(x, y, z)$$

căreia îi determinăm punctele critice ale căror coordonate sunt soluţii ale sistemului

$$\begin{cases} 2x(\lambda+1)=0 \\ 2y(\lambda+1)=0 \\ 2z(\lambda+1)=0 \\ x^2+y^2+z^2-100=0, \end{cases}$$

format prin anularea derivatelor parţiale de ordinul întâi ale funcţiei $\mathcal{L}$.

Prin rezolvarea acestui sistem găsim trei puncte staţionare ale funcţiei $\mathcal{L}$

$$(10,0,0;-1), \quad (0,10,0;-1), \quad (0,0,10;-1)$$

din care deducem că funcţia $f$ are punctele staţionare condiţionate

$$M_1(10,0,0), \quad M_2(0,10,0), \quad M_3(0,0,10)$$

corespunzătoare respectiv valorilor $-1$, $-2$, $-3$ ale multiplicatorului $\lambda$ a lui Lagrange.

Diferenţiala de ordinul 2 a funcţiei lui Lagrange $\mathcal{L}$ într–un punct oarecare de pe sferă are expresia

$$d^2\mathcal{L}(x,y,z;\lambda)=2(\lambda{+}1)dx^2{+}2(\lambda{+}2)dy^2{+}2(\lambda{+}3)dz^2{+}4(xdx{+}ydy{+}zdz)d\lambda,$$

expresie ce se simplifică dacă ţinem cont că între diferenţialele variabilelor există legătura

$$xdx+ydy+zdz=0.$$

Astfel, într–o primă fază, putem scrie

$$d^2\mathcal{L}(x,y,z;\lambda)=2\Big(\lambda+1)dx^2+(\lambda+2)dy^2+(\lambda+3)dz^2\Big).$$

Diferenţialele de ordinul 2 ale funcţiei $\mathcal{L}$ în punctele ei staţionare au respectiv expresiile

$$d^2\mathcal{L}(M_1;-1)=2(dy^2+dz^2), \quad d^2\mathcal{L}(M_2;-1)=2(dz^2-dx^2),$$
$$d^2\mathcal{L}(M_3;-1)=-2(2dx^2+dy^2).$$

Prima diferenţială este o formă pătratică pozitiv definită, a doua este formă pătratică nedefinită, în timp ce a treia diferenţială este formă pătratică negativ definită.

Rezultatele găsite arată că, pentru funcţia $f$, $M_1$ este punct de minim condiţionat, $M_2$ este un punct de tip şa, iar $M_3$ este punct de maxim condiţionat.

Prin urmare, în punctele sferei de rază 10 cu centrul în origine, funcţia $f$ are o valoare minimă, egală cu $f(M_1) = 100$ şi o valoare maximă $f(M_3) = 300$.

Luând în calcul şi valorile pe care le ia funcţia $f$ în interiorul domeniului ei de definiţie, rezultă că cea mai mică valoare a funcţiei este zero, atinsă în origine, iar cea mai mare valoare este 300, iar această valoare este luată într–un punct de pe frontiera domeniului $D$. ■

**Exerciţiul 1.5.1** *Să se găsească cea mai mică şi cea mai mare valoare a funcţiei*

$$f : \mathbb{K} \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^3 + y^2,$$

*unde* $\mathbb{K} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ x^2 + y^2 - 1 \leq 0\}$.

**Soluţie.** Determinăm întâi extremele locale ale funcţiei $f$ în interiorul $D$ al mulţimii compacte $\mathbb{K}$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ x^2 + y^2 - 1 < 0\}$, ce reprezintă discul deschis de rază 1 cu centrul în origine.

Derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei $f$,

$$f_{,x}(x, y) = 3x^2, \quad f_{,y}(x, y) = 2y,$$

se anulează doar în origine şi deci $O(0, 0)$ este singurul punct staţionar al restricţiei funcţiei $f$ la domeniul $D$.

Diferenţiala a doua a funcţiei $f$ în origine, $d^2 f(0, 0) = 2dy^2$, este formă pătratică pozitivă şi deci nu putem preciza natura punctului staţionar pe această cale. Se impune să cercetăm semnul diferenţei $f(x, y) - f(0, 0)$. Această diferenţă poate avea valori atât pozitive cât şi negative în orice vecinătate a originii şi ca atare originea nu este punct de extrem al restricţiei funcţiei $f$ la interiorul domeniului ei de definiţie. Acest punct este de tip şa.

Cercetăm acum extremele restricţiei funcţiei $f$ la mulţimea $\mathbb{K} \setminus D$. Cum coordonatele $x$, $y$ ale punctelor acestei mulţimi satisfac ecuaţia $x^2+y^2-1 = 0$, rezultă că trebuiesc determinate extremele condiţionate ale funcţiei scop $f$ cu legătura $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Pentru a le determina, introducem funcţia lui Lagrange

$$\mathcal{L}(x, y; \lambda) = f(x, y) + \lambda F(x, y) = x^3 + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

căreia îi calculăm derivatele parţiale de ordinul întâi şi apoi rezolvăm sistemul format prin anularea acestora. Se găsesc soluţiile:

$$\begin{cases} (0,-1;-1); \qquad (0,1;-1); \qquad \Big(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\sqrt{5};-1\Big); \\ \Big(\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\sqrt{5};-1\Big); \quad \Big(-1,0;\dfrac{3}{2}\Big); \quad \Big(1,0;-\dfrac{3}{2}\Big), \end{cases} \tag{1.43}$$

care vor fi punctele staţionare ale funcţiei $\mathcal{L}$. Corespunzător,

$$\begin{cases} M_1(0,-1); \qquad M_2(0,1); \quad M_3\Big(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\sqrt{5}\Big); \\ M_4\Big(\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\sqrt{5}\Big); \quad M_5(-1,0); \qquad M_6(1,0) \end{cases} \tag{1.44}$$

vor fi puncte staţionare condiţionate ale funcţiei $f$. Punctelor $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ le corespunde valoarea $\lambda=-1$ a multiplicatorului Lagrange, $M_5$ corespunde lui $\lambda=3/2$, iar pentru $M_6$ valoarea multiplicatorului este $\lambda=-3/2$.

Diferenţiala a doua a funcţiei lui Lagrange într–un punct oarecare $(x,y;\lambda)\in \mathbb{R}^3$ are expresia

$$d^2\mathcal{L}(x,y;\lambda)=2(3x+\lambda)dx^2+2(1+\lambda)dy^2, \tag{1.45}$$

în care trebuie avut în vedere că între diferenţialele variabilelor independente există relaţia

$$2xdx+2ydy=0, \tag{1.46}$$

obţinută prin diferenţierea legăturii.

Înlocuind pe rând $(x,y;\lambda)$ din (1.45) cu ternele din (1.43) şi ţinând cont de (1.45), găsim că diferenţiala a doua a funcţiei lui Lagrange în punctele sale staţionare are valorile:

$$\begin{cases} d^2\mathcal{L}(M_1;-1) = -2dx^2; \quad d^2\mathcal{L}(M_2;-1) = -2dx^2; \\ d^2\mathcal{L}(M_3;-1) = 10dy^2; \quad d^2\mathcal{L}(M_4;-1) = 10dy^2; \\ d^2\mathcal{L}\Big(M_5;\dfrac{3}{2}\Big) = 5dy^2; \quad d^2\mathcal{L}\Big(M_6;-\dfrac{3}{2}\Big) = -dy^2. \end{cases} \tag{1.47}$$

Din analiza formelor pătratice (1.47) putem spune că $M_1$, $M_2$, $M_6$ sunt puncte de maxim condiţionat şi $M_3$, $M_4$, $M_5$ sunt puncte de minim condiţionat ale funcţiei $f$, valorile funcţiei $f$ în aceste puncte fiind

$$f(M_1)=f(M_2)=f(M_6)=1, \quad f(M_3)=f(M_4)=\frac{23}{27}, \quad f(M_5)=-1.$$

Aşadar, valoarea maximă a funcţiei $f$ este 1, această valoare fiind luată în oricare din punctele $M_1$, $M_2$, $M_6$, iar cea mai mică valoare a lui $f$ este $-1$ şi reprezintă valoarea funcţiei în punctul $M_5$.

Să observăm că extremele condiţionate ale funcţiei $f(x,y) = x^3 + y^2$ cu legătura $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ se pot determina şi pe altă cale, calculând extremele locale ale funcţiei $h : [-1,1] \to I\!R$ ale cărei valori, $h(x) = x^3 - x^2 + 1$, se obţin prin înlocuirea lui $y^2$ din expresia lui $f(x,y)$ cu $y^2 = 1 - x^2$, aceasta din urmă rezultând din legătură.

Tabloul de variaţie al funcţiei $h$ arată că $x = 0$ şi $x = 2/3$ sunt puncte de extrem din interiorul domeniului de definiţie al funcţiei $h$, primul de maxim, al doilea de minim, cu valorile corespunzătoare 1 şi 23/27.

Luând în calcul şi valorile lui $h$ în extremităţile intervalului $[-1,1]$ deducem că cea mai mică valoare a funcţiei $h$ este $-1$ iar cea mai mare este 1. Valorile extreme ale funcţiei $h$ coincid cu cele ale funcţiei $f$.

Pentru determinarea coordonatelor punctelor în care $f$ ia valori extreme se foloseşte legătura $y^2 = 1 - x^2$.

Rezultatele stabilite arată că dacă perechile $(x,y)$ sunt astfel încât $x^2 + y^2 - 1 \leq 0$, atunci

$$-1 \leq x^3 + y^2 \leq 1.$$

Această dublă inegalitate a rezultat fie folosind metoda de determinare a extremelor locale ale funcţiilor definite pe mulţimi compacte, fie determinând extremele funcţiei $h$, restricţia funcţiei $f$ la mulţimea soluţiilor ecuaţiei $F(x,y) = 0$. ■

### 1.5.2 Probleme propuse

**Exerciţiul 1.5.2** D*intre toate valorile funcţiei*

$$f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to I\!R, \quad f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(x+y),$$

*să se determine cea mai mică şi cea mai mare.*

**Răspuns**. În interiorul mulţimii de definiţie, funcţia $f$ are o valoare maximă locală $f_{\max} = 3\sqrt{3}/2$ în punctul $M_0(\pi/3, \pi/3)$. Pe frontiera mulţimii de definiţie, $f$ are un punct de minim în origine, valoarea minimă fiind $f_{\min} = 0$, două puncte de maxim $M_1(\pi/2, \pi/4)$, $M_2(\pi/4, \pi/2)$, în ambele funcţia $f$ având valoarea $f_{\max} = 1 + \sqrt{2}$ şi un punct de minim $M_3(\pi/2, \pi/2)$ cu $f(M_3) = 2$.

Rezultă că cea mai mică valoare a funcţiei $f$ este egală cu zero, iar cea mai mare valoare a sa este $3\sqrt{3}/2$. ■

**Exerciţiul 1.5.3** *Să se determine extremele globale ale următoarelor funcţii definite pe mulţimi compacte:*

$$\mathbf{1}.\, f: K \to I\!R, \quad \begin{cases} f(x,y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y, \\ K = \{(x,y) \in I\!R^2 |\, x^2 + y^2 \leq 25\} \end{cases};$$

$$\mathbf{2}.\, f: K \to I\!R, \quad \begin{cases} f(x,y) = x^2 - xy + y^2, \\ K = \{(x,y) \in I\!R^2 |\, |x| + |y| \leq 1\} \end{cases}$$

**Răspuns**. **1**. Funcţia $f$ are pe mulţimea $K$ două puncte de extrem, unul de maxim $M_1(-3,4)$ şi altul de minim $M_2(3,-4)$, valorile sale fiind $f_{\max} = f(M_1) = 125$ şi $f_{\min} = f(M_2) = -75$. Ambele puncte sunt pe frontiera mulţimii compacte $K$ şi pentru determinarea lor se foloseşte metoda multiplicatorilor lui Lagrange, legătura fiind ecuaţia frontierei $x^2 + y^2 - 25 = 0$.

Conform teoremei lui Weierstrass, care spune că o funcţie continuă pe o mulţime compactă este mărginită şi îşi atinge marginile, rezultă că extremele găsite sunt globale, deci:

$$\sup_{x^2+y^2 \leq 25} f(x,y) = f(-3,4) = 125, \quad \inf_{x^2+y^2 \leq 25} f(x,y) = f(-3,4) = -75.$$

**2**. Domeniul de definiţie al funcţiei $f$ este, în metrica $\delta$, bila închisă de rază 1 şi centrul în originea reperului cartezian ortogonal $Oxy$. Această bilă reprezintă pătratul cu diagonalele de lungime 2 situate pe axele de coordonate. Funcţia $f$ are un punct de minim în origine, cu $f_{\min} = 0$, patru puncte de minim, câte unul în interiorul fiecărei laturi a frontierei mulţimii $K$ : $M_1(1/2,1/2)$ cu $f(M_1) = 1/4$; $M_2(-1/2,1/2)$ cu $f(M_2) = 3/4$; $M_3(-1/2,-1/2)$ cu $f(M_3) = 1/4$; $M_4(1/2,-1/2)$ cu $f(M_4) = 3/4$ şi încă patru puncte de maxim situate în extremităţile segmentelor de dreaptă care reunite dau frontiera: $A(1,0)$ cu f(A)=1; $B(0,1)$ cu $f(B) = 1$; $C(-1,0)$ cu f(C)=1; $D(0,1)$ cu $f(D) = 1$.

Rezultă că valoarea maximă a funcţiei $f$ pe mulţimea $|x| + |y| \leq 1$ este 1, atinsă în oricare din punctele $A, B, C, D$, iar valoarea minimă este 0, punctul unde $f$ ia această valoare fiind în origine, ce este punct din interiorul mulţimii $K$. ■

# 1.6 Transformări punctuale regulate

## 1.6.1 Exemple şi exerciţii rezolvate

**Exerciţiul 1.6.1** *Să se arate că transformarea $T$ dată prin*

$$T: \begin{cases} u &= x^2+y^2 \\ v &= x^2-y^2 \end{cases}, \quad (x,y)\in D,$$

*unde $D=\{(x,y)\in I\!\!R^2|\ x>0, y>0, x>y\}$, este o transformare punctuală regulată, să se determine inversa acesteia şi să se verifice că produsul jacobienilor celor două transformări este egal cu* 1.

**Soluţie.** Funcţiile $u=u(x,y)$ şi $v=v(x,y)$ sunt infinit diferenţiabile pe mulţimea deschisă $D$ care este mulţimea punctelor planului raportat la reperul cartezian $xOy$ cuprinse între semiaxa pozitivă $Ox$ şi porţiunea din prima bisectoare $y=x$ aflată în primul cadran.

Determinantul funcţional

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)}(x,y)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y\end{vmatrix}=-8xy$$

nu se anulează în punctele domeniului $D$. Rezultă că transformarea $T$ este o transformare punctuală regulată.

Inversa $T^{-1}$

$$T^{-1}: \begin{cases} x &= \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{u+v} \\ y &= \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{u-v} \end{cases}, \quad (u,v)\in\Omega,$$

a transformării punctuale regulate $T$ este, de asemenea, o transformare punctuală regulată pe domeniul $\Omega=\{(u,v)\in I\!\!R^2|\ u>v>0\}$ şi are jacobianul

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(u,v)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v)\end{vmatrix}=\frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt{u^2-v^2}}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ t1 & -1\end{vmatrix}=-\frac{1}{4\sqrt{u^2-v^2}}.$$

Dacă ţinem cont că $\sqrt{u^2 - v^2} = 2xy$, atunci

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)}(x,y) \cdot \frac{D(x,y)}{D(u,v)}(u,v) = 1,$$

constatând astfel că relaţia între cei doi jacobieni este verificată. ■

**Exerciţiul 1.6.2** S*e dau transformările*

$$(T_1) \qquad u_1 = x + y, \quad u_2 = y + z, \quad u_3 = z + x, \qquad D \subset I\!R^3,$$

$$(T_2) \qquad v_1 = u_2 u_3, \quad v_2 = u_3 u_1, \quad v_3 = u_1^2 + u_2^2, \quad D^* \subset I\!R^3.$$

*Se cere să se determine domeniile maxime $D$ şi $D^*$ în care $(T_1)$ şi $(T_2)$ sunt transformări punctuale regulate. Să se determine transformarea compusă $T_2(T_1)$ şi să se verifice relaţia*

$$\frac{D(u_1,u_2,u_3)}{D(x,y,z)} \cdot \frac{D(v_1,v_2,v_3)}{D(u_1,u_2,u_3)} = \frac{D(v_1,v_2,v_3)}{D(x,y,z)}.$$

**Soluţie.** Avem

$$\frac{D(u_1,u_2,u_3)}{D(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

deci $D = I\!R^3$; avem şi

$$\frac{D(v_1,v_2,v_3)}{D(u_1,u_2,u_3)} = \begin{vmatrix} 0 & u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & u_1 \\ 2u_1 & 2u_2 & 0 \end{vmatrix} = 2u_3(u_1^2 + u_2^2)$$

deci $D^* = I\!R^3 \setminus A$, unde $A$ este reuniunea mulţimii punctelor din spaţiu pentru care $u_3 = 0$ (un plan) cu mulţimea punctelor din spaţiu pentru care $u_1 = u_2 = 0$ (dreaptă).

Transformarea compusă $T_2(T_1)$ este dată de

$$T_2(T_1) \qquad \begin{cases} v_1 &= (y+z)(z+x), \\ v_2 &= (z+x)(x+y), \\ v_3 &= (x+y)^2 + (y+z)^2 \end{cases}$$

deci

$$\frac{D(v_1,v_2,v_3)}{D(x,y,z)} = \begin{vmatrix} y+z & z+x & 2z+x+y \\ 2x+y+z & z+x & x+y \\ 2(x+y) & 2(2y+x+z) & 2(y+z) \end{vmatrix} =$$

$$= 4(z+x)[(y+z)^2+(x+y)^2].$$

Dacă ţinem seama de forma transformării $(T_1)$ rezultă că

$$\frac{D(v_1,v_2,v_3)}{D(x,y,z)} = 4u_3(u_1^2+u_2^2) = \frac{D(u_1,u_2,u_3)}{D(x,y,z)} \cdot \frac{D(v_1,v_2,v_3)}{D(u_1,u_2,u_3)}$$

şi egalitatea din enunţ este verificată. ■

## 1.6.2 Probleme propuse

**Exerciţiul 1.6.3** *Să se stabilească dacă transformarea*

$$\mathbf{T} : I\!R^3 \setminus \{\mathbf{x} = (x_1,x_2,x_3) |\, x_1 \in I\!R, x_2 > x_3 > 0\} \to I\!R^3, \quad \mathbf{T} = (y_1,y_2,y_3),$$

*unde*

$$(T) \quad \begin{cases} y_1 &= x_1, \\ y_2 &= \dfrac{1}{2}(x_2^2 - x_3^2), \\ y_3 &= x_2 x_3, \end{cases}$$

*este transformare punctuală regulată (difeomorfism). În caz afirmativ, să se determine transformarea inversă transformării $(T)$.*

**Răspuns**. Aplicaţia $\mathbf{T}$ este difeomorfism. Mulţimea valorilor sale este $\setminus\{\mathbf{y} = (y_1,y_2,y_3) |\, y_1 \in I\!R, y_2 > y_3 > 0\}$ şi

$$(T^{-1}) \quad \begin{cases} x_1 &= y_1, \\ x_2 &= \sqrt{y_2 + \sqrt{y_2^2 + y_3^2}}, \\ x_3 &= \sqrt{-y_2 + \sqrt{y_2^2 + y_3^2}}. \end{cases}$$

■

**Exerciţiul 1.6.4** *Să se cerceteze dacă transformarea*

$$\mathbf{T} : I\!R^3 \to I\!R^3, \quad \mathbf{T} = (y_1, y_2, y_3), \quad (T) \quad \begin{cases} y_1 &= e^{2x_2} + e^{2x_3}, \\ y_2 &= e^{2x_1} - e^{2x_3}, \\ y_3 &= x_1 - x_2 \end{cases}$$

*este transformare punctuală regulată (difeomorfism). În caz afirmativ, să se determine transformarea inversă transformării* $(T)$.

**Răspuns**. $\text{Im}\mathbf{T} = I\!R^3 \setminus \{\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) |\, y_1 > 0\}$. Aplicaţia $\mathbf{T}$ este difeomorfism de la $I\!R^3$ la $\text{Im}\mathbf{T}$. ■

**Exemplul 1.6.1** A*plicaţia*

$$\mathbf{T} : I\!R^*_+ \times [0, 2\pi) \times I\!R \to I\!R^3 \setminus \{\mathbf{x} = (0, 0, z) |\; z \in I\!R\}, \quad \mathbf{T} = (x, y, z),$$

*unde*

$$(T) \quad \begin{cases} x &= \rho \cos\theta, \\ y &= \rho \sin\theta, \\ z &= z \end{cases}$$

*este un difeomorfism de la mulţimea* $I\!R^*_+ \times [0, 2\pi) \times I\!R$ *la mulţimea* $I\!R^3 \setminus \{\mathbf{x} = (0, 0, z) |\; z \in I\!R\}$. *Să se determine inversa aplicaţiei* $\mathbf{T}$.

**Răspuns**. $\mathbf{T}^{-1} : I\!R^3 \setminus \{\mathbf{x} = (0, 0, z) |\; z \in I\!R\} \to I\!R^*_+ \times [0, 2\pi) \times I\!R$, $\mathbf{T}^{-1} = (\rho, \theta, z)$, unde

$$(T^{-1}) \quad \begin{cases} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \cos\theta &= \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin\theta &= \dfrac{y}{\sqrt{x^+ y^2}}, \\ z &= z. \end{cases}$$

Pentru determinarea funcţiei unghi polar $\theta$ se precizează mai întâi cadranul şi apoi se caută soluţia ecuaţiei $\text{tg}\,\theta = y/x$ din acel cadran. ■

# 1.7 Dependenţă şi independenţă funcţională

## 1.7.1 Exemple şi exerciţii rezolvate

**Exerciţiul 1.7.1** Să *se arate că funcţiile reale de trei variabile reale*

$$f(x,y,z) = x + y + z, \quad g(x,y,z) = x - y + z, \quad h(x,y,z) = 4xy + 4yz,$$

*definite pe* $\mathbb{R}^3$, *sunt dependente funcţional şi să se găsească relaţia lor de dependenţă funcţională.*

**Soluţie.** Deoarece numărul funcţiilor este egal cu numărul variabilelor independente, vom calcula jacobianul acestora. Avem

$$\frac{D(f,g,h)}{D(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial z} \\ \dfrac{\partial h}{\partial x} & \dfrac{\partial h}{\partial y} & \dfrac{\partial h}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4y & 4x+4z & 4y \end{vmatrix} = 0.$$

Acest rezultat demonstrează că funcţiile $f$, $g$ şi $h$ sunt dependente funcţional pe mulţimea $\mathbb{R}^3$.

Termenii care compun expresia funcţiei $h$ pot apărea din ridicarea la pătrat a exprsiilor funcţiilor $f$ şi $g$. Folosind această observaţie verificăm simplu că relaţia de dependenţă funcţională este

$$h(x,y,z) = f^2(x,y,z) - g^2(x,y,z)$$

şi aceasta are loc în toate punctele spaţiului $\mathbb{R}^3$. ■

**Exemplul 1.7.1** F*ie* $f, g, h$, *funcţii reale de o variabilă reală derivabile şi inversabile.*

*Funcţiile* $u = u(x,y,z)$, $v = v(x,y,z)$ *şi* $w = w(x,y,z)$, *unde*

$$u = f\Big(\frac{y}{z}\Big), \quad v = g\Big(\frac{z}{x}\Big), \quad w = h\Big(\frac{x}{y}\Big), \qquad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0,$$

*sunt în dependenţă funcţională pe domeniul* $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \, x > 0, y > 0, z > 0\}$.

**Soluţie.** Funcţiile $u, v, w$ sunt funcţii compuse, iar variabilele intermediare

$$s = s(x,y,z) = \frac{y}{z}, \quad t = t(x,y,z) = \frac{z}{x}, \quad \tau = \tau(x,y,z) = \frac{x}{y}$$

satisfac evident identitatea

$$s(x,y,z) \cdot t(x,y,z) \cdot \tau(x,y,z) \equiv 1.$$

Deoarece numărul funcţiilor este acelaşi cu numărul variabilelor independente, pentru a decide dacă $u, v$ şi $w$ sunt sau nu sunt în dependenţă funcţională, este de ajuns să calculăm determinantul funcţional

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial v}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial w}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial w}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial w}{\partial z}(x,y,z) \end{vmatrix}.$$

Folosind regula de derivare a funcţiilor compuse constatăm că valoarea acestui determinant este

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}(x,y,z) = \frac{f'(s)g'(t)h'(\tau)}{(xyz)^2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{vmatrix}.$$

Cum ultimul determinant este nul, rezultă că cele trei funcţii sunt dependente funcţional. Relaţia de dependenţă între inversele acestor funcţii este

$$f^{-1}(u) \cdot g^{-1}(v) \cdot h^{-1}(w) = 1,$$

aceasta rezultând din faptul că $s \cdot t \cdot \tau = 1$. ∎

**Exemplul 1.7.2** *Funcţiile*

$$u = f\Big(\frac{1}{(x-y)(x-z)}\Big), \quad v = g\Big(\frac{1}{(y-z)(y-x)}\Big), \quad w = h\Big(\frac{1}{(z-x)(z-y)}\Big),$$

*cu $f$, $g$ şi $h$ funcţii derivabile şi injective pe un acelaşi interval $I \subset I\!R$, sunt dependente funcţional.*

**Soluţie.** Într-adevăr, deoarece numărul funcţiilor este acelaşi cu numărul variabilelor independente este de ajuns să calculăm determinantul funcţional

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial v}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial w}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial w}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial w}{\partial z}(x,y,z) \end{vmatrix}.$$

Pentru a calcula mai uşor derivatele parţiale din expresia acestui determinant, introducem variabilele intermediare

$$s = \frac{1}{(x-y)(x-z)}, \quad t = \frac{1}{(y-z)(y-x)}, \quad \tau = \frac{1}{(z-x)(z-y)}.$$

Acum, funcţiile $u, v, w$ sunt funcţii compuse şi aplicând regula lanţului de derivare a funcţiilor compuse, găsim

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}(x,y,z) = \lambda \cdot \begin{vmatrix} y+z-2x & x-z & x-y \\ y-z & z+x-2y & y-x \\ z-y & z-x & x+y-2z \end{vmatrix},$$

unde am folosit notaţia

$$\lambda = \frac{f'(s)g'(t)h'(\tau)}{[(x-y)(y-z)(z-x)]^4}.$$

Ultimul determinant este nul deoarece prima coloană $C_1$ a sa este combinaţie liniară de celelalte două, $C_2$ şi $C_3$; mai precis, $C_1 = -C_2 - C_3$.

Rezultatul stabilit demonstrează că cele trei funcţii $u, v, w$ sunt dependente funcţional.

Deoarece

$$s + t + \tau = \frac{z-y+x-z+y-x}{(x-y)(y-z)(z-x)} = 0,$$

rezultă că relaţia de dependenţă funcţională ce se poate pune în evidenţă este

$$f^{-1}(u) + g^{-1}(v) + h^{-1}(w) = 0,$$

unde $s = f^{-1}(u)$, $t = g^{-1}(v)$ şi $\tau = h^{-1}(w)$ sunt funcţiile inverse corespunzătoare funcţiilor date. ■

**Exemplul 1.7.3** *Funcţiile reale de n variabile reale*

$$f_1(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \quad f_2(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2,$$
$$f_3(\mathbf{x}) = x_1x_2 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + \cdots + x_2x_n + \cdots + x_{n-1}x_n,$$

*unde* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in I\!\!R^n$, *sunt în dependenţă funcţională pe* $I\!\!R^n$.

**Soluţie.** Fie $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$. Matricea jacobiană $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \in \mathcal{M}_{3\times n}(I\!\!R)$ are ca elemente pe cele trei linii componentele corespunzătoare ale gradienţilor $(\nabla f_1)(\mathbf{x})$, $(\nabla f_2)(\mathbf{x})$ şi $(\nabla f_3)(\mathbf{x})$. Prin urmare,

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 & \cdots & 2x_n \\ x_2 + x_3 + \cdots x_n & x_1 + x_3 + \cdots + x_n & \cdots & x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Această matrice are rangul 2 pentru că orice minor de ordinul trei al matricei este nul şi există cel puţin un minor de ordinul al doilea diferit de zero. Prin urmare, două din cele trei funcţii sunt independente funcţional, cea de a treia exprimându–se în funcţie de aceste două. Se observă că are loc identitatea

$$f_2(\mathbf{x}) \equiv f_1^2(\mathbf{x}) - 2\, f_3(\mathbf{x}),$$

ceea ce arată că relaţia de dependenţă funcţională între cele trei funcţii este $f_2 = f_1^2 - 2\, f_3$. ■

### 1.7.2 Exemple şi exerciţii propuse

**Exemplul 1.7.4** Funcţi*ile reale de trei variabile reale*

$$\begin{cases} u = xy - z, \\ v = xz + y, \\ w = (x^2+1)(y^2+z^2) - yz(x^2+1) - x(y^2-z^2), \end{cases}$$

*definite pe* $I\!\!R^3$, *sunt în depndenţă funcţională pe* $I\!\!R^3$.

**Indicaţie**. Se arată că determinantul funcţional al celor trei funcţii în raport cu variabilele $x, y, z$ este nul, deci funcţiile sunt în dependenţă funcţională.
**Răspuns**. Legătura dintre $u, v$ şi $w$ este : $w = u^2 - uv + v^2$. ■

**Exerciţiul 1.7.2** C*e relaţie trebuie să satisfacă derivatele parţiale ale funcţiei* $z = f(x, y)$ *astfel încât* $z$ *să depindă de* $x$ *şi* $y$ *prin intermediul funcţiei* $u = x^2 + y^2$?

**Indicaţie**. Relaţia rezultă din condiţia ca funcţiile $z = f(x, y)$ şi $u = x^2 + y^2$ să fie dependente funcţional. Pentru aceasta trebuie ca $\dfrac{D(z, u)}{D(x, y)} = 0$.

**Răspuns**. Relaţia căutată este $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$. ■

**Exerciţiul 1.7.3** *Să se studieze dependenţa sau independenţa funcţiilor*

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) & = & \dfrac{z}{x}, \\ f_2(x, y, z) & = & -x + \dfrac{y}{x}, \\ f_3(x, y, z) & = & z - e^{-x + \frac{y}{x}}, \end{cases}$$

*în punctele* $(1, 0, 0)$ *şi* $(1, 1, 0)$.

**Răspuns**. Deoarece $\det J_{\mathbf{f}}(1, 0, 0) \neq 0$ şi $\det J_{\mathbf{f}}(1, 1, 0) \neq 0$, rezultă că în ambele puncte $f_1, f_2, f_3$ sunt independente funcţional. Aici, $J_{\mathbf{f}}(x, y, z)$ este matricea jacobiană a funcţiei vectoriale $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ calculată în punctul $(x, y, z)$. ■

**Exerciţiul 1.7.4** *Să se studieze dependenţa sau independenţa funcţiilor reale de patru variabile reale*

$$\begin{cases} f_1(x, y, z, u) & = & \dfrac{y}{z}, \\ f_2(x, y, z, u) & = & \dfrac{u}{y}, \\ f_3(x, y, z, u) & = & x^2 + y^2 + z^2 - u, \end{cases}$$

*definite pe mulţimea* $(0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, \infty)$. ■

**Indicaţie**. Matricea jacobiană a funcţiei vectoriale $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ are trei linii şi patru coloane. Se determină rangul acesteia. Se găseşte rang$J_{\mathbf{f}}(x, y, z) = 3$ în toate punctele $(x, y, z) \in ((0, \infty))^4$.
**Răspuns**. Funcţiile date sunt independente funcţional. ■

**Exerciţiul 1.7.5** *Studiaţi dependenţa sau independenţa funcţională a funcţiilor*

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) &= (x + y + z)^3 - 1, \\ f_2(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2, \\ f_3(x, y, z) &= (xy + yz + zx)^2 + 2, \end{cases}$$

*definite pe* $I\!R^3$.

**Răspuns**. Cele trei funcţii sunt dependente funcţional. ■

## 1.8 Schimbări de variabile

### 1.8.1 Schimbarea variabilei independente în ecuaţii diferenţiale ordinare

**Exerciţiul 1.8.1** *Ce devine ecuaţia diferenţială ordinară de ordinul al doilea cu coeficienţi variabili*

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} + \frac{a^2}{x^2} y = 0,$$

*dacă noua variabila independentă este $t$, iar legătura cu vechea variabilă $x$ este $x = \varphi(t) = \dfrac{1}{t}$?*

**Soluţie.** Pentru $x = \varphi(t)$, obţinem funcţia compusă

$$z(t) = y(\varphi(t)) \Leftrightarrow y(x) = z(\varphi^{-1}(x)).$$

În cazul considerat $y(x) = z\Big(\dfrac{1}{x}\Big)$, deci:

$$\frac{dy}{dx}(x) = \frac{dz}{dt}(t)\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x^2}\frac{dz}{dt}(t) = -t^2\frac{dz}{dt}(t);$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x) = \frac{d}{dx}\Big( - t^2\frac{dz}{dt}(t)\Big) = \frac{d}{dt}\Big( - t^2\frac{dz}{dt}(t)\Big)\frac{dt}{dx} = t^4\frac{d^2z}{dt^2}(t) + 2t^3\frac{dz}{dt}(t).$$

Înlocuind expresiile acestor două derivate în ecuaţie constatăm că forma transformată a sa este ecuaţia diferenţială a vibraţiilor armonice

$$\frac{d^2z}{dt^2} + a^2z = 0.$$

Avantajul efectuării schimbării de variabilă indicată constă în aceea că ecuaţia transformată este una cunoscută, căreia i se cunosc toate soluţiile

$$z(t) = C_1 \cos at + C_2 \sin at,$$

unde $C_1$ şi $C_2$ sunt constante reale arbitrare.

Revenind la variabila $x$, obţinem

$$y(x) = C_1 \cos \frac{a}{x} + C_2 \sin \frac{a}{x}$$

ce reprezintă toate soluţiile ecuaţiei diferenţiale date. ∎

**Exemplul 1.8.1** E*cuaţia diferenţială ordinară de ordinul al doilea, liniară şi cu coeficienţi variabili*

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} + y = 0,$$

*unde* $x > 0$, *este o* **ecuaţie de tip Euler**.

*Schimbarea de variabilă independentă* $x = e^t$ *conduce la ecuaţia diferenţială liniară cu coeficienţi constanţi*

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{dz}{dt} + z = 0,$$

*căreia i se poate determina toate soluţiile.*

**Soluţie.** Deoarece funcţiile $z$ şi $y$ sunt legate prin relaţia $z = y(e^t)$, avem $y = z(\ln x)$.

Derivând ultima relaţie după regula de derivare a funcţiilor compuse, avem:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\cdot\frac{dz}{dt} = e^{-t}\cdot\frac{dz}{dt};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\Big(\frac{dy}{dx}\Big) = e^{-t}\frac{d}{dt}\Big(e^{-t}\frac{dz}{dt}\Big) = e^{-2t}\Big(\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt}\Big).$$

Înlocuirea acestora în ecuaţia iniţială conduce la ecuaţia diferenţială liniară şi omogenă, de ordinul al doilea, cu coeficienţi constanţi

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{dz}{dt} + z = 0.$$

Acestei ecuaţii îi putem afla soluţiile după următorul procedeu.

Se caută o soluţie de forma $z = e^{\lambda t}$, unde $\lambda$ este un parametru real sau complex. Impunând o astfel de soluţie constatăm că parametrul $\lambda$ trebuie să verifice aşa numita ecuaţie caracteristică

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

şi care are rădăcinile $\lambda_{1,2} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Celor două rădăcini ale ecuaţiei caracteristice le corespund soluţiile

$$\begin{cases} \widetilde{z}_1(t) \;=\; e^{\lambda_1 t} \;=\; e^{-\frac{1}{2}t}\Big(\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t + i\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\Big), \\ \\ \widetilde{z}_2(t) \;=\; e^{\lambda_1 t} \;=\; e^{-\frac{1}{2}t}\Big(\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t - i\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\Big) \end{cases}$$

ce sunt funcţii complexe, conjugate una celeilalte. Cum ecuaţia diferenţială este liniară, putem să considerăm alte două soluţii, combinaţii liniare ale acestora,

$$z_1(t) = \frac{\widetilde{z}_1(t) + \widetilde{z}_2(t)}{2} = e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t, \quad z_2(t) = \frac{\widetilde{z}_1(t) - \widetilde{z}_2(t)}{2i} = e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

care, după cum se vede, sunt funcţii reale.

Orice altă soluţie a ecuaţiei liniare cu coeficienţi constanţi este o combinaţie liniară a soluţiilor $z_1(t)$ şi $z_2(t)$

$$z(t) = C_1 z_1(t) + C_2 z_2(t),$$

unde $C_1$ şi $C_2$ sunt constante reale arbitrare. Alte soluţii nu mai există. Spunem că aceasta este soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale dată. Aşadar,

$$z(t) = e^{-\frac{1}{2}t}(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t).$$

Ţinând cont de legătura dintre funcţiile $t \mapsto z(t)$ şi $x \mapsto y(x)$ rezultă că soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale dată este

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\Big(C_1 \cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\Big) + C_2 \sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\Big)\Big).$$

Dacă se doreşte o soluţie anume, trebuiesc precizate valorile constantelor $C_1$ şi $C_2$. Aceste constante se pot determina din condiţii iniţiale care constau în precizarea valorilor funcţiilor $x \mapsto y(x)$ şi $x \mapsto y'(x)$ într–un punct arbitrar dar fixat din intervalul $(0, \infty)$. De exemplu, dacă luăm drept condiţii iniţiale valorile

$$y(1) = 1,\ \ y'(1) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2},$$

atunci $C_1 = C_2 = 1$ şi deci

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\Big(\cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\Big) + \sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\Big)\Big)$$

este soluţia ecuaţiei date iniţial care verifică şi condiţiile iniţiale precizate. ■

### 1.8.2 Schimbarea ambelor variabile într–o ecuaţie diferenţială ordinară

**Exerciţiul 1.8.2** C*e devine ecuaţia diferenţială de ordinul al doilea*

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2 - \frac{dy}{dx} = 0$$

*dacă se schimbă între ele rolul variabilelor?*

**Soluţie.** Variabilele ecuaţiei diferenţiale sunt $x$ şi $y$, prima fiind indepententă iar a doua dependentă de prima, $y = y(x)$.

Variabila $y$ este funcţia necunoscută a ecuaţiei diferenţiale.

A schimba rolurile variabilelor înseamnă a considera că

$$x = \varphi(y) = y^{-1}(x).$$

Folosind legătura între derivata unei funcţii cu derivata inversei sale

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$$

şi regulile de derivare a funcţiilor compuse, găsim

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\dfrac{d^2x}{dy^2}}{\Big(\dfrac{dx}{dy}\Big)^3}.$$

Înlocuind expresiile acestor derivate în ecuaţia dată, obţinem

$$x(y)\frac{d^2x}{dy^2}+\Big(\frac{dx}{dy}\Big)^2-\frac{dx}{dy}=0.$$

Schimbarea rolului variabilelor nu aduce simplificarea ecuaţiei diferenţiale date. ■

**Exerciţiul 1.8.3** C*e devine ecuaţia*

$$(1-x^2)^2y''+y=0,\qquad x\in(-1,1)$$

*prin schimbarea*

$$x=\tanh t,\quad y=\frac{u}{\cosh t},$$

*unde* $u=u(t)$ *este noua funcţie necunoscută?*

**Soluţie.** Diferenţiem pe $x$ şi $y$

$$dx=\frac{1}{\cosh^2 t}\,dt;\qquad dy=\frac{1}{\cosh t}\,du-u\cdot\frac{\sinh t}{\cosh^2 t}\,dt,$$

după care efectuăm raportul celor două diferenţiale. Obţinem

$$y'=\frac{dy}{dx}=\cosh t\frac{du}{dt}-u\,\sinh t.$$

Pentru calculul derivatei secunde a funcţiei $x\mapsto y(x)$ derivăm ambii membri ai egalităţii de mai sus în raport cu $x$, în membrul al doilea aplicând regula de derivare a funcţiilor compuse

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\Big(\cosh t\frac{du}{dt}-u\,\sinh t\Big)\cdot\frac{dt}{dx}=\cosh^3 t\Big(\frac{d^2u}{dt^2}-u\Big).$$

Cu acestea, ecuaţia iniţială devine

$$(1-\tanh^2 t)^2\cosh^3 t\Big(\frac{d^2u}{dt^2}-u\Big)+\frac{u}{\cosh t}=0,$$

sau echivalent,

$$\frac{d^2u}{dt^2}=0.$$

Soluţia generală a ultimei ecuaţii este $u(t)=2C_1t+C_2$, unde $C_1$ şi $C_2$ sunt constante reale arbitrare.

Revenind la variabilele iniţiale rezultă că soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale dată este

$$y(x;C_1,C_2)=\Big(C_1\ln\frac{1+x}{1-x}+C_2\Big)\sqrt{1-x^2}$$

la aceasta ajungându–se după ce se inversează funcţia $x=\tanh t$. ■

### 1.8.3 Schimbarea variabilelor independente în expresii diferenţiale cu derivate parţiale

**Exerciţiul 1.8.4** *Să se transforme ecuaţia diferenţială liniară, cu derivate parţiale de ordinul întâi*

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

*dacă* $u=x$, $v=x^2+y^2$, *u şi v fiind noile variabile independente.*

**Soluţie.** Considerăm funcţia

$$w(u,v)=z(x(u,v),y(u,v))\quad\Leftrightarrow\quad z(x,y)=w(u(x,y),v(x,y)).$$

Folosind regulile de derivare ale funcţiilor compuse, de două variabile, obţinem

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}(x,y) & = & \dfrac{\partial w}{\partial u}(u,v)\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y)+\dfrac{\partial w}{\partial v}(u,v)\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial w}{\partial u}(u,v)+2x\dfrac{\partial w}{\partial v}(u,v),\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}(x,y) & = & \dfrac{\partial w}{\partial u}(u,v)\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y)+\dfrac{\partial w}{\partial v}(u,v)\dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y)=2y\dfrac{\partial w}{\partial v}(u,v).\end{cases}$$

Cu acestea, ecuaţia dată se transformă în ecuaţia diferenţială

$$\frac{\partial w}{\partial u}(u,v)=0,$$

evident mult mai simplă, care poate fi integrată, adică i se poate determina toate soluţiile. Într-adevăr, avem că $w=f(v)$, unde $f$ este o funcţie arbitrară.

Aşadar, soluţia generală a ecuaţiei iniţiale este $z=f(x^2+y^2)$.

Din punct de vedere geometric, soluţia generală a acestei ecuaţii reprezintă o suprafaţă de rotaţie. ■

**Exerciţiul 1.8.5** Să *se transforme ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale de ordinul al doilea*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \;=\; a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

(*ecuaţia propagării undelor sau ecuaţia coardei vibrante*) *dacă* $\xi=x-at$, $\eta=x+at$, $\xi$ *şi* $\eta$ *fiind noile variabile independente.*

**Soluţie.** Introducem noua funcţie necunoscută $w$ prin

$$z(x,t)=w(\xi(x,t),\eta(x,t))=w(x-at,x+at),$$

ce va depinde de variabilele $\xi$ şi $\eta$.

Derivatele parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei $w$, necesare înlocuirii în ecuaţia diferenţială dată, se determină pornind de la cele de ordinul unu

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)=\dfrac{\partial w}{\partial \xi}(\xi,\eta)\dfrac{\partial \xi}{\partial x}(x,t)+\dfrac{\partial w}{\partial \eta}(\xi,\eta)\dfrac{\partial \eta}{\partial x}(x,t)=\dfrac{\partial w}{\partial \xi}(\xi,\eta)+\dfrac{\partial w}{\partial \eta}(\xi,\eta),\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)=\dfrac{\partial w}{\partial \xi}(\xi,\eta)\dfrac{\partial \xi}{\partial t}(x,t)+\dfrac{\partial w}{\partial \eta}(\xi,\eta)\dfrac{\partial \eta}{\partial t}(x,t)=a\Big(-\dfrac{\partial w}{\partial \xi}(\xi,\eta)+\dfrac{\partial w}{\partial \eta}(\xi,\eta)\Big).\end{cases}$$

Aplicând aici operatorii de derivare parţială care se impun şi folosind derivarea funcţiilor compuse, găsim derivatele parţiale de ordinul doi nemixte ale funcţiei $u$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &=& \dfrac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}(\xi,\eta)+2\dfrac{\partial^2 w}{\partial \xi\partial \eta}(\xi,\eta)+\dfrac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}(\xi,\eta),\\[2mm] \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) &=& a^2\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}(\xi,\eta)-2\dfrac{\partial^2 w}{\partial \xi\partial \eta}(\xi,\eta)+\dfrac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}(\xi,\eta)\Big),\end{cases}$$

care înlocuite în ecuaţia iniţială, conduce la forma transformată

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\xi\partial\eta}(\xi,\eta) = 0,$$

mult mai simplă, căreia putem să –i determinăm soluţia generală. Într-adevăr, funcţia

$$w(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta),$$

unde $f$ şi $g$ sunt funcţii arbitrare de două ori diferenţiabile, reprezintă soluţia generală a ecuaţiei transformate.

În consecinţă,

$$u(x,t) = f(x - at) + g(x + at)$$

reprezintă soluţia generală a ecuaţiei propagării undelor. Primul termen din membrul al doilea al expresiei soluţiei generale corespunde unei unde regresive, cel de al doilea termen unei unde progresive. ■

**Exemplul 1.8.2** E*xpresia operatorului lui Laplace din* $\mathbb{R}^2$ *în coordonate polare este*

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}. \tag{1.48}$$

**Soluţie.** Dacă polul reperului polar coincide cu originea reperului cartezian ortogonal $Oxy$, iar axa polară coincide cu axa $Ox$, atunci legătura dintre coordonatele carteziene $x$, $y$ şi coordonatele polare $\rho$, $\theta$ este

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta. \tag{1.49}$$

Să remarcăm că (1.49) reprezintă o transformare punctuală regulată între mulţimea $(0,\infty) \times [0, 2\pi)$ şi mulţimea $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0} = (0,0)\}$.

Pentru a afla expresia laplacianului

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{1.50}$$

în coordonatele polare $(\rho,\theta)$, în (1.50) trebuie să efectuăm schimbarea de variabile independente (1.49). În acest scop trebuie să exprimăm operatorii de derivare parţială de ordinul întâi şi pe cei de ordinul al doilea, nemixti, în funcţie de operatorii

$$\frac{\partial}{\partial\rho}, \quad \frac{\partial}{\partial\theta}, \quad \frac{\partial^2}{\partial\rho^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\theta}, \quad \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}.$$

Folosind regula lanţului de derivare a funcţiilor compuse, avem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial \rho}\cdot\dfrac{\partial \rho}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial \theta}\cdot\dfrac{\partial \theta}{\partial x}, \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial \rho}\cdot\dfrac{\partial \rho}{\partial y} + \dfrac{\partial}{\partial \theta}\cdot\dfrac{\partial \theta}{\partial y}. \end{cases} \tag{1.51}$$

Examinând (1.51), constatăm că avem nevoie de expresiile derivatelor parţiale de ordinul întâi ale lui $\rho$ şi $\theta$ în raport cu variabilele $x$ şi $y$. Acestea, le putem determina fie precizând mai întâi transformarea punctuală regulată inversă transformării (1.49) şi apoi calculând efectiv ceea ce dorim, fie aplicând teoria sistemelor de funcţii definite implicit, căci (1.49) poate fi interpretat şi ca un sistem de funcţiii definite implicit de forma

$$\begin{cases} F_1(\rho,\theta,x,y) = \rho\cos\theta - x = 0, \\[1ex] F_2(\rho,\theta,x,y) = \rho\sin\theta - y = 0, \end{cases}$$

după care derivatele parţiale sunt rapoarte de determinanţi funcţionali. De exemplu,

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{\dfrac{D(F_1,F_2)}{D(x,\theta)}}{\dfrac{D(F_1,F_2)}{D(\rho,\theta)}}.$$

Pe orice cale am proceda, obţinem

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial x} &= \cos\theta, & \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{\sin\theta}{\rho}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial y} &= \sin\theta, & \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\cos\theta}{\rho}. \end{aligned} \tag{1.52}$$

Înlocuind (1.52) în (1.51), găsim

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial \rho}\cdot\cos\theta - \dfrac{\partial}{\partial \theta}\cdot\dfrac{\sin\theta}{\rho}, \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial \rho}\cdot\sin\theta + \dfrac{\partial}{\partial \theta}\cdot\dfrac{\cos\theta}{\rho}. \end{cases} \tag{1.53}$$

Pentru determinarea derivatelor parţiale de ordinul al doilea nemixte în raport cu coordonatele carteziene $x$ şi $y$, se foloseşte (1.53) şi regula lanţului de derivare a funcţiilor compuse. Concomitent, se ţine cont de (1.52). Găsim

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2}{\partial \rho^2}\cdot\Big(\dfrac{\partial\rho}{\partial x}\Big)^2 + 2\dfrac{\partial^2}{\partial\rho\partial\theta}\cdot\dfrac{\partial\rho}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial\theta}{\partial x} + \dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}\cdot\Big(\dfrac{\partial\theta}{\partial x}\Big)^2 + \dfrac{\partial}{\partial\rho}\cdot\dfrac{\partial^2\rho}{\partial x^2} + \dfrac{\partial}{\partial\theta}\cdot\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2}, \\ \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2}{\partial \rho^2}\cdot\Big(\dfrac{\partial\rho}{\partial y}\Big)^2 + 2\dfrac{\partial^2}{\partial\rho\partial\theta}\cdot\dfrac{\partial\rho}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial\theta}{\partial y} + \dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}\cdot\Big(\dfrac{\partial\theta}{\partial y}\Big)^2 + \dfrac{\partial}{\partial\rho}\cdot\dfrac{\partial^2\rho}{\partial y^2} + \dfrac{\partial}{\partial\theta}\cdot\dfrac{\partial^2\theta}{\partial y^2}. \end{cases}$$

Adunând membru cu membru aceste relaţii, obţinem

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\cdot\|\nabla\rho\|^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\theta}\cdot(\nabla\rho\cdot\nabla\theta) + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\cdot\|\nabla\theta\|^2 + \frac{\partial}{\partial\rho}\cdot\nabla^2\rho + \frac{\partial}{\partial\theta}\cdot\nabla^2\theta, \quad (1.54)$$

unde factorul $(\nabla\rho\cdot\nabla\theta)$ reprezintă produsul scalar al gradienţilor funcţiilor $\rho$ şi $\theta$

$$\nabla\rho = \frac{\partial\rho}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\rho}{\partial y}\mathbf{j}, \quad \nabla\theta = \frac{\partial\theta}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\theta}{\partial y}\mathbf{j},$$

ale căror expresii concrete, după utilizarea relaţiilor (1.52), sunt

$$\begin{cases} \nabla\rho = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}, \\ \nabla\theta = -\dfrac{\sin\theta}{\rho}\mathbf{i} + \dfrac{\cos\theta}{\rho}\mathbf{j}. \end{cases}$$

De aici rezultă

$$\|\nabla\rho\| = 1, \quad \|\nabla\theta\| = \frac{1}{\rho}, \quad \nabla\rho\cdot\nabla\theta = 0. \quad (1.55)$$

Examinând expresia lui $\nabla^2$ din (1.54), deducem că avem nevoie de derivatele parţiale de ordinul al doilea, nemixte, ale funcţiilor $\rho$ şi $\theta$ în raport cu $x$ şi $y$. Pentru aceasta folosim (1.53), aplicând operaţia de derivare în raport cu $x$ sau $y$, după caz, utilizând totodată regula lanţului de derivare a funcţiilor compuse. Găsim

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\rho}{\partial x^2} = \dfrac{\sin^2\theta}{\rho}; \quad \dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \dfrac{\sin 2\theta}{\rho^2}; \\ \dfrac{\partial^2\rho}{\partial y^2} = \dfrac{\cos^2\theta}{\rho}; \quad \dfrac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = -\dfrac{\sin 2\theta}{\rho^2}, \end{cases}$$

de unde deducem laplacienii funcţiilor $\rho$ şi $\theta$

$$\nabla^2\rho = \frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\rho}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho}, \quad \nabla^2\theta = \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = 0. \tag{1.56}$$

Din (1.54), (1.55) şi (1.56) rezultă că $\nabla^2$ are expresia (1.48). ■

**Exemplul 1.8.3** *Expresia laplacianului* $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ *în coordonatele sferice (coordonatele polare în spaţiu)* $(\rho, \varphi, \theta)$, *legate de coordonatele carteziene prin*

$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta, \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z = \rho\cos\varphi, \end{cases} \tag{1.57}$$

*este*

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho}\Big) + \frac{1}{\rho^2\sin\varphi}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big) + \frac{1}{\rho^2\sin^2\varphi}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}. \tag{1.58}$$

**Soluţie.** Mai întâi trebuiesc determinaţi operatorii de derivare parţială de ordinul unu. Aplicând regula de derivare a funcţiilor compuse, avem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial\rho}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial}{\partial\rho} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial}{\partial\varphi} + \dfrac{\partial\theta}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial}{\partial\theta}, \\ \dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{\partial\rho}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial}{\partial\rho} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial}{\partial\varphi} + \dfrac{\partial\theta}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial}{\partial\theta}, \\ \dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{\partial\rho}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial}{\partial\rho} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial}{\partial\varphi} + \dfrac{\partial\theta}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial}{\partial\theta}. \end{cases} \tag{1.59}$$

Apoi, calculăm operatorii de derivare parţială de ordinul al doilea, nemixti. Aceasta o vom putea realiza plecând de la (1.59) şi aplicând din nou regula de derivare a funcţiilor compuse. Astfel, expresia operatorului de derivare parţială de ordinul al doilea în raport cu variabila $x$ este

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \Big(\frac{\partial\rho}{\partial x}\Big)^2\cdot\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big)^2\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \Big(\frac{\partial\theta}{\partial x}\Big)^2\cdot\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \\ &+ 2\Big(\frac{\partial\rho}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\varphi} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\theta} + \frac{\partial\theta}{\partial x}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\rho}\Big) + \\ &+ \frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}. \end{aligned} \tag{1.60}$$

Celelalte două derivate parţiale de ordinul al doilea din expresia laplacianului se obţin din (1.60) trecând pe $x$ în $y$ şi mai apoi în $z$. Sumând aceste trei derivate parţiale, obţinem forma laplacianului în coordonate polare în spaţiu

$$\begin{aligned}\nabla^2 &= \|\nabla\rho\|^2\cdot\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\|\nabla\varphi\|^2\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\|\nabla\theta\|^2\cdot\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\\ &+ 2\Big((\nabla\rho\cdot\nabla\varphi)\cdot\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\varphi}+(\nabla\varphi\cdot\nabla\theta)\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\theta}+(\nabla\theta\cdot\nabla\rho)\cdot\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\rho}\Big)+\\ &+ \nabla^2\rho\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}+\nabla^2\varphi\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}+\nabla^2\theta\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}.\end{aligned}\tag{1.61}$$

Pentru a determina expresia concretă a laplacianului, din (1.61) se constată că avem nevoie de gradienţii şi laplacienii funcţiilor $\rho$, $\varphi$, $\theta$ ce depind de variabilele $x$, $y$ şi $z$. Aceste funcţii există căci (1.57) constituie o transformare punctuală regulată $\mathbf{T}:\Omega\to I\!R^3\setminus\{\mathbf{x}=(0,0,z)\}$, unde $\Omega=(0,\infty)\times(0,\pi)\times[0,2\pi)$.

Efectuând calculele, găsim că gradienţii necesari în (1.61), exprimaţi în funcţie de coordonatele sferice, sunt

$$\begin{cases}\nabla\rho &= \sin\varphi\cos\theta\,\mathbf{i}+\sin\varphi\sin\theta\,\mathbf{j}+\cos\varphi\,\mathbf{k},\\ \nabla\varphi &= \dfrac{\cos\varphi\cos\theta}{\rho}\,\mathbf{i}+\dfrac{\cos\varphi\sin\theta}{\rho}\,\mathbf{j}-\dfrac{\sin\varphi}{\rho}\,\mathbf{k},\\ \nabla\theta &= -\dfrac{\sin\theta}{\rho\sin\varphi}\,\mathbf{i}+\dfrac{\cos\theta}{\rho\sin\varphi}\,\mathbf{j}.\end{cases}$$

Deducem apoi:

$$\begin{aligned}&\|\nabla\rho\|=1,\qquad \|\nabla\varphi\|=\frac{1}{\rho},\quad \|\nabla\theta\|=\frac{1}{\rho\sin\varphi};\\ &\nabla\rho\cdot\nabla\varphi=0,\quad \nabla\varphi\cdot\nabla\theta=0,\qquad \nabla\theta\cdot\nabla\rho=0.\end{aligned}\tag{1.62}$$

Pentru calculul laplacienilor funcţiilor $\rho,\varphi$ şi $\theta$ se aplică din nou regula de derivare a funcţiilor compuse şi se găseşte

$$\nabla^2\rho=\frac{2}{\rho},\quad \nabla^2\varphi=\frac{\cos\varphi}{\rho^2\sin\varphi},\quad \nabla^2\theta=0.\tag{1.63}$$

Folosirea relaţiilor (1.62) şi (1.63) în (1.61) conduce la

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{\rho^2\sin^2\varphi}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{2}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\cos\varphi}{\rho^2\sin\varphi}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi},$$

care este echivalentă cu (1.58). ■

### 1.8.4 Schimbarea tuturor variabilelor într–o ecuaţie diferenţială

**Exerciţiul 1.8.6** Să *se transforme ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale de ordinul întâi*

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$$

*luând drept noi variabile independente*

$$u=x,\quad v=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}$$

*şi funcţie necunoscută*

$$w=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}.$$

**Soluţie.** Vom determina derivatele parţiale de ordinul întâi $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ în funcţie de derivatele parţiale $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ şi $\dfrac{\partial w}{\partial v}$ plecând de la diferenţialele noilor variabile

$$du=dx,\quad dv=\frac{1}{x^2}dx-\frac{1}{y^2}dy^2,\quad dw=\frac{1}{x^2}dx-\frac{1}{z^2}dz^2.$$

Pe de altă parte avem

$$dw=\frac{\partial w}{\partial u}du+\frac{\partial w}{\partial v}dv.$$

Cum diferenţiala unei funcţii este unică, putem scrie

$$\frac{\partial w}{\partial u}du+\frac{\partial w}{\partial v}dv=\frac{1}{x^2}dx-\frac{1}{z^2}dz^2.$$

Dacă în această egalitate înlocuim diferenţialele funcţiilor $u$ şi $v$, obţinem

$$\frac{\partial w}{\partial u}dx+\frac{\partial w}{\partial v}\Big(\frac{1}{x^2}dx-\frac{1}{y^2}dy^2\Big)=\frac{1}{x^2}dx-\frac{1}{z^2}dz^2,$$

din care se poate determina diferenţiala funcţiei $z$

$$dz = \Big(\frac{1}{x^2} - \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}\Big)z^2 dx + \frac{z}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}dy.$$

Din această expresie, folosind unicitatea diferenţialei unei funcţii de două variabile, rezultă

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} &= \Big(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\partial w}{\partial u} - \dfrac{1}{x^2}\dfrac{\partial w}{\partial v}\Big)z^2, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} &= \dfrac{z}{y^2}\dfrac{\partial w}{\partial v}. \end{cases}$$

Înlocuind acestea în ecuaţia iniţială, se găseşte

$$x^2 z^2\Big(\frac{1}{x^2} - \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}\Big) + z^2\frac{\partial w}{\partial v} = z^2,$$

care, după reducerea termenilor asemenea, conduce la ecuaţia simplă

$$\frac{\partial w}{\partial u}(u, v) = 0$$

a cărei soluţie generală este $w = f(v)$, unde $f$ este o funcţie reală diferenţiabilă, arbitrară.

Folosind legăturile dintre noile şi vechile variabile, găsim că funcţia

$$z = \frac{x}{1 + xf\Big(\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}\Big)}$$

este soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale iniţiale. ■

**Exerciţiul 1.8.7** T*ransformaţi ecuaţia*

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = (y - x)z$$

*introducând noile variabile independente*

$$u = x^2 + y^2, \quad v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

*şi noua funcţie necunoscută* $w = -x - y + \ln z$.

**Soluţie.** Diferenţiind legăturile dintre variabile, obţinem

$$\begin{cases} du &= 2xdx + 2ydy, \\ dv &= -\dfrac{1}{x^2}dx - \dfrac{1}{y^2}dy, \\ dw &= -dx - dy + \dfrac{1}{z}dz. \end{cases}$$

Pe de altă parte

$$dw = \frac{\partial w}{\partial u}du + \frac{\partial w}{\partial v}dv.$$

Egalând expresiile diferenţialei funcţiei $w$, avem

$$-dx - dy + \frac{1}{z}dz = (2xdx + 2ydy)\frac{\partial w}{\partial u} - \Big(\frac{1}{x^2}dx + \frac{1}{y^2}dy\Big)\frac{\partial w}{\partial v},$$

de unde rezultă

$$dz = z\Big(2x\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v} + 1\Big)dx + z\Big(2y\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v} + 1\Big)dy.$$

Pe de altă parte,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Folosind aceste expresii ale diferenţialei funcţiei $z$ şi unicitatea expresiei ei, deducem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} &= 2x\dfrac{\partial w}{\partial u} - \dfrac{1}{x^2}\dfrac{\partial w}{\partial v} + 1, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} &= 2y\dfrac{\partial w}{\partial u} - \dfrac{1}{y^2}\dfrac{\partial w}{\partial v} + 1. \end{cases}$$

Cu acestea, ecuaţia iniţială ia forma mai simplă

$$\Big(\frac{zx}{y^2} - \frac{zy}{x^2}\Big)\frac{\partial w}{\partial v} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial w}{\partial v} = 0,$$

ce se poate integra,

$$w = f(u)$$

fiind soluţia sa generală, unde $f$ este o funcţie diferenţiabilă arbitrară.

Ţinând cont de legătura dintre variabile, găsim că

$$z(x,y) = e^{x+y+f(x^2+y^2)}$$

este soluţia generală a ecuaţiei iniţiale. ■

**Exerciţiul 1.8.8** *Să se transforme ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale de ordinul doi*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \tag{1.64}$$

*dacă* $u = x + y$, $v = y/x$, $w = z/x$, *u şi v fiind noile variabile independente, iar w noua funcţie necunoscută.*

**Soluţie.** Putem utiliza şi aici metoda diferenţierii legăturilor dintre vechile şi noile variabile, cu precizarea că la a doua diferenţiere a acestora trebuie să se aibă în vedere că diferenţiala doua a unei funcţii compuse nu mai este invariantă la o schimbare a variabilelor.

După prima diferenţiere se obţine

$$\begin{cases} du &= dx + dy, \\ dv &= \dfrac{1}{x^2}(ydx - xdy), \end{cases} \tag{1.65}$$

$$dw = \frac{1}{x^2}(xdz - zdx). \tag{1.66}$$

Din (1.66) avem $x^2 dw = xdz - zdx$, care, diferenţiind–o încă o dată, conduce la

$$2dxdw + xd^2w = d^2z. \tag{1.67}$$

În această egalitate ţinem cont de următoarele:

$$dw = \frac{\partial w}{\partial u}(dx + dy) + \frac{1}{x^2}(xdy - ydx)\frac{\partial w}{\partial v} = \Big(\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\Big)dx + \Big(\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{1}{x}\frac{\partial w}{\partial v}\Big)dy; \tag{1.68}$$

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2; \tag{1.69}$$

$$d^2w = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}du^2 + 2\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}dudv + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}dv^2 + \frac{\partial w}{\partial u}d^2u + \frac{\partial w}{\partial v}d^2v. \tag{1.70}$$

Diferenţialele de ordinul al doilea ale funcţiilor $u$ şi $v$ sunt

$$d^2u = 0,\ d^2v = \frac{2y}{x^3}dx^2 - \frac{2}{x^2}dxdy. \tag{1.71}$$

Înlocuind (1.65) şi (1.71) în (1.70) şi grupând după $dx^2$, $dxdy$ şi $dy^2$, se obţine

$$\begin{aligned} d^2w &= \Big(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - 2\frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + 2\frac{y}{x^3}\frac{\partial w}{\partial v}\Big)dx^2 + \\ &+ 2\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \Big(\frac{1}{x} - \frac{y}{x^2}\Big)\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} - \frac{y}{x^3}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}\Big)dxdy + \qquad (1.72) \\ &+ \Big(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2\frac{1}{x}\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\Big)dy^2. \end{aligned}$$

Folosirea relaţiilor (1.68), (1.72), (1.69) în egalitatea (1.67), urmată de egalarea coeficienţilor lui $dx^2$, $dxdy$ şi $dy^2$, conduce la derivatele parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei $z$, exprimate în funcţie de derivatele parţiale ale funcţiei $w$,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= 2\dfrac{\partial w}{\partial u} + x\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2} - 2\dfrac{y}{x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \dfrac{y^2}{x^3}\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}, \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \dfrac{\partial w}{\partial u} + x\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \Big(1 - \dfrac{y}{x}\Big)\dfrac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} - \dfrac{y}{x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}, \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= x\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2\dfrac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}. \end{cases}$$

Înlocuirea acestora în (1.64) conduce la o forma simplificată a ecuaţiei date

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}(u, v) = 0,$$

care are soluţia generală

$$w(u, v) = vf(u) + g(u),$$

unde $f$ şi $g$ sunt funcţii arbitrare de două ori diferenţiabile.

Cu legătura dintre variabile avem că

$$z(x, y) = yf(x + y) + xg(x + y)$$

este soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (1.64). ■

### 1.8.5 Exemple şi exerciţii propuse

**Exerciţiul 1.8.9** C*e devine ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale de ordinul întâi*

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - z = 0,$$

*dacă variabilele independente* $x$ *şi* $y$ *trec în variabilele* $u$ *şi* $v$, *unde* $u = x, v = y/x$?

**Indicaţie**. Fie $(u, v) \mapsto w(u, v)$ funcţia definită de

$$z(x, y) = w(u(x, y), v(x, y)).$$

Derivatele parţiale ale funcţiei $(x, y) \mapsto z(x, y)$ se calculează folosind regula lanţului de derivare a funcţiilor compuse.

**Răspuns**. $u\dfrac{\partial w}{\partial u} - w = 0.$ ■

**Exerciţiul 1.8.10** *În ce se transformă ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale*

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

*dacă noile variabile independente* $u$ *şi* $v$ *sunt date prin*

$$x = u^2 - v^2, \quad y = u^2 + v^2, \qquad (u, v) \in D \subset I\!\!R^2?$$

**Indicaţie**. Se introduce funcţia necunoscută $(u, v) \mapsto w(u, v)$ legată de funcţia $(x, y) \mapsto z(x, y)$ prin

$$z(x, y) = w(u(x, y), v(x, y))$$

şi se calculează derivatele parţiale ale funcţiei $z$.

Pentru calculul derivatelor parţiale de ordinul întâi ale funcţiilor $(x, y) \mapsto u(x, y)$ şi $(x, y) \mapsto v(x, y)$ folosim teorema de existenţă şi unicitate a sistemelor de funcţii definite implicit, funcţiile $F_1$ şi $F_2$ ale sistemului fiind

$$F_1(x, y, u, v) = u^2 - v^2 - x, \qquad F_2(x, y, u, v) = u^2 + v^2 - y.$$

**Răspuns**. Derivatele funcţiilor $u$ şi $v$ sunt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{4u}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{4u}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{4v}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{4v},$$

iar ecuaţia dată devine $\dfrac{\partial w}{\partial u} = 0$. Aceasta are soluţia sa generală $w = f(v)$, unde $f$ este o funcţie arbitrară diferenţiabilă, $z(x,y) = f\Big(\sqrt{\dfrac{y-x}{2}}\Big)$. ■

**Exerciţiul 1.8.11** C*e devine ecuaţia diferenţială ordinară de ordinul al doilea*

$$y'' + (x+y)(1+y')^3 = 0,$$

*dacă $x = u + t$ şi $y = u - t$, iar $u = u(t)$ este noua funcţie necunoscută?*

**Indicaţie**. Dacă notăm $y' = \dfrac{dy}{dx}$, $\dot{u} = \dfrac{du}{dt}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\ddot{u} = \dfrac{d^2u}{dt^2}$ şi utilizăm regula de derivare a funcţiilor compuse, găsim

$$y' = \frac{\dot{u} - 1}{\dot{u} + 1}, \quad y'' = \frac{2\,\ddot{u}}{(1 + \dot{u})^3}.$$

**Răspuns**. Ecuaţia devine $\ddot{u} + 8u\,\dot{u}^3 = 0$. ■

**Exemplul 1.8.4** E*cuaţia diferenţială cu derivate parţiale de ordinul al doilea*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

*nu îşi schimbă forma în urma schimbării de variabile*

$$u = x + z, \quad v = y + z.$$

**Exerciţiul 1.8.12** *Să se transforme ecuaţia*

$$z\Big(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}\Big) + x^2 + y^2 = 0,$$

*punând în locul variabilelor independente $x$ şi $y$ variabilele $u$ şi $v$, unde*

$$u = \frac{y}{x}, \quad v = x^2 + y^2,$$

*iar în locul funcţiei necunoscute, funcţia $(u,v) \mapsto w(u,v)$ unde $w = z^2$.*

**Indicaţie**. Se diferenţiază toate legăturile dintre variabile, iar după identificarea coeficienţilor lui $dx$ şi $dy$ se găseşte

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} &= -\dfrac{y}{2x^2 z}\dfrac{\partial w}{\partial u} + \dfrac{x}{z}\dfrac{\partial w}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} &= \dfrac{1}{2xz}\dfrac{\partial w}{\partial u} + \dfrac{y}{z}\dfrac{\partial w}{\partial v}. \end{cases}$$

**Răspuns**. Se ajunge la ecuaţia $\dfrac{\partial w}{\partial v}+1=0$ care are soluţia $w=-v+f(u)$, cu $f$ o funcţie diferenţiabilă arbitrară, din care se poate obţine soluţia generală a ecuaţiei iniţiale $z^2+x^2+y^2=f\Big(\dfrac{y}{x}\Big)$. ■

**Exerciţiul 1.8.13** *Să se rezolve ecuaţia*

$$\Big(\frac{\partial z}{\partial y}\Big)^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0, \tag{1.73}$$

*luând pe $x$ ca funcţie necunoscută de variabilele $y$ şi $z$.*

**Indicaţie**. Considerând că $x=x(y,z)$, se obţine:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\dfrac{\partial x}{\partial z}},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial x}{\partial y}}{\dfrac{\partial x}{\partial z}};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{\dfrac{\partial^2 x}{\partial z^2}}{\Big(\dfrac{\partial x}{\partial z}\Big)^3},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2\dfrac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial z}-\Big(\dfrac{\partial x}{\partial y}\Big)^2\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial z^2}-\Big(\dfrac{\partial x}{\partial z}\Big)^2\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial y^2}}{\Big(\dfrac{\partial x}{\partial z}\Big)^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{-\dfrac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial z}+\dfrac{\partial x}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial z^2}}{\Big(\dfrac{\partial x}{\partial z}\Big)^3}.$$

**Răspuns**. Se găseşte $\dfrac{\partial^2 x}{\partial y^2}=0$, de unde $x=y\varphi(z)+\psi(z)$, cu $\varphi$ şi $\psi$ funcţii arbitrare de două ori diferenţiabile, este soluţia generală a ecuaţiei iniţiale.

**Observaţia 1.8.1** P*roblema de mai sus se poate formula în termenii funcţiilor definite implicit în modul următor:*

*Să se arate că funcţia* $z = z(x, y)$ *definită implicit de ecuaţia*

$$y\varphi(z) + \psi(z) - x = 0,$$

*unde* $\varphi$ *şi* $\psi$ *sunt funcţii arbitrare de două ori diferenţiabile, satisface ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale de ordinul al doilea* (1.73).

■

**Exerciţiul 1.8.14** C*e devine ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale de ordinul al doilea*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

*dacă se face schimbarea* $u = x+y, v = x-y, w = xy-z$, *unde* $(u, v) \mapsto w(u, v)$ *este noua funcţie necunoscută.*

**Răspuns**. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \dfrac{1}{2}.$ ■

**Exerciţiul 1.8.15** *Să se găsească expresia laplacianului în coordonatele semipolare în spaţiu* (*coordonatele cilindrice*) $(\rho, \theta, z)$, *unde*

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta, \\ z = z. \end{cases}$$

**Răspuns**. $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \theta} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}.$ ■

**Exerciţiul 1.8.16** C*e devine ecuaţia* $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + kz = 0$ *în coordonate polare dacă se presupune că noua funcţie necunoscută* $\omega$ *este funcţie numai de mărimea razei vectoare* $\rho$ *şi că* $\rho$ *nu depinde de unghiul polar* $\theta$.

**Răspuns**. $\dfrac{d(\rho\omega)}{d\rho} + k\rho\omega = 0.$

Această ecuaţie poate fi integrată. Se găseşte că soluţia sa generală este $\omega(\rho) = \dfrac{C}{\rho} e^{-\frac{1}{2}k\rho^2}$, unde $C$ este o constantă pozitivă. De aici rezultă că

$$z(x,y) = \frac{C}{\sqrt{x^2+y^2}} e^{-\frac{1}{2}k(x^2+y^2)},$$

deoarece $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$. ■

**Exerciţiul 1.8.17** *În ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale de ordinul al doilea*

$$q(1+q)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (1+p+q+pq)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + p(1+p)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

*în care* $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$ *şi* $\dfrac{\partial z}{\partial y} = q$ *sunt notaţiile lui Monge, să se schimbe variabilele după legea*

$$u = x + z, \quad v = y + z, \quad w = x + y + z,$$

*considerând că noua funcţie necunoscută este* $w = w(u,v)$.

**Răspuns**. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = 0.$ ■

**Exerciţiul 1.8.18** A*rătaţi că forma ecuaţiei diferenţiale cu derivate parţiale de ordinul al doilea*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \Big(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big)^2 = 0$$

*nu se schimbă dacă noua funcţie necunoscută este* $x$, *iar variabilele independente sunt* $y$ *şi* $z$.

**Indicaţie**. Se consideră că $x = x(y,z)$ şi se determină derivatele parţiale de ordinul doi ale funcţiei $(x,y) \mapsto z(x,y)$ în funcţie de derivatele funcţiei $(y,z) \mapsto x(y,z)$. ■